11 класс.

1. (3 балла) Числа a, b, c удовлетворяют условиям $a < 0 < b < c$. Какие из следующих неравенств

$$1)\ a^4 < b^4,\ \ 2)\ a+b < c,\ \ 3)\ a-c < b-c,\ \ 4)\ ac < bc,\ \ 5)\ ab < ac,\ \ 6)\ |b| \neq |a-c|$$

при данных условиях обязательно выполняются? Перечислите их номера в порядке возрастания без запятых и пробелов.

Ответ: 2346

2. (5 баллов) При делении чисел 312837 и 310650 на некоторое трехзначное натуральное число получились одинаковые остатки. Найдите этот остаток.

Ответ: 96

Решение. $312837 - 310650 = 2187 = 3^7$. У этого числа трехзначные делители тоже являются степенями тройки, т.е. $3^6 = 729$, $3^5 = 243$. Поделив эти числа на 729 и 243 с остатком выясняем, что остаток всегда 96.

3. (7 баллов) В четырехугольнике $ABCD$ известно, что

$$AB = \sqrt{7},\ BC = \sqrt{28},\ CD = \sqrt{21}, \angle ABC = 120^\circ,\ \angle BCD = 90^\circ.$$

Найдите длину стороны AD.

Ответ: 7

4. (10 баллов) На лотерее каждую неделю разыгрывают 6 номеров из 36. Какова вероятность того, что на этой неделе выпадет хотя бы один номер такой же, как в прошлую неделю? Результат округлите до тысячных.

Ответ: $0,695$

Решение. Всего исходов: C_{36}^6; исходов, в которых ни один номер не совпадает: C_{30}^6. Тогда вероятность $1 - \dfrac{C_{30}^6}{C_{36}^6}$.

5. (10 баллов) Сколько способов замостить прямоугольник 2×12 неперекрывающимися доминошками 1×2?

Ответ: 233

Решение. Пусть d_n — количество способов замостить прямоугольник $2 \times n$ неперекрывающимися доминошками 1×2. Если первая доминошка лежит вертикально, то количество способов равно d_{n-1}; а если первая доминошка лежит горизонтально, то количество способов равно d_{n-2}. Тогда $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$.

6. (10 баллов) Площадь сектора круга равна 100. При каком значении радиуса круга периметр этого сектора будет минимальным? Если ответ не целое число, то округлите до десятых.

Ответ: 10

Решение. Площадь сектора соответствующего α радиан $S_\alpha = \dfrac{1}{2}R^2\alpha = 100$. Длина периметра равна $L(R) = 2R + R\alpha = 2R + \dfrac{200}{R}$, которая достигает минимума в точке $R = 10$.

7. (12 баллов) Решите систему уравнений. В ответ напишите наибольшее значение y.

$$\begin{cases} 3x^2 - xy = 1, \\ 9xy + y^2 = 22. \end{cases}$$

Ответ: 5, 5

Решение. Первое уравнение умножим на 3 и прибавим ко второму

$$\begin{cases} 3x^2 - xy = 1, | \cdot 3 \\ 9xy + y^2 = 22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - xy = 1, \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 25 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - xy = 1, \\ 3x + y = \pm 5 \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения y и подставив в первое найдем все решения: $(1; 2), (-1; -2), (-\frac{1}{6}; 5,5), (\frac{1}{6}; -5,5)$.

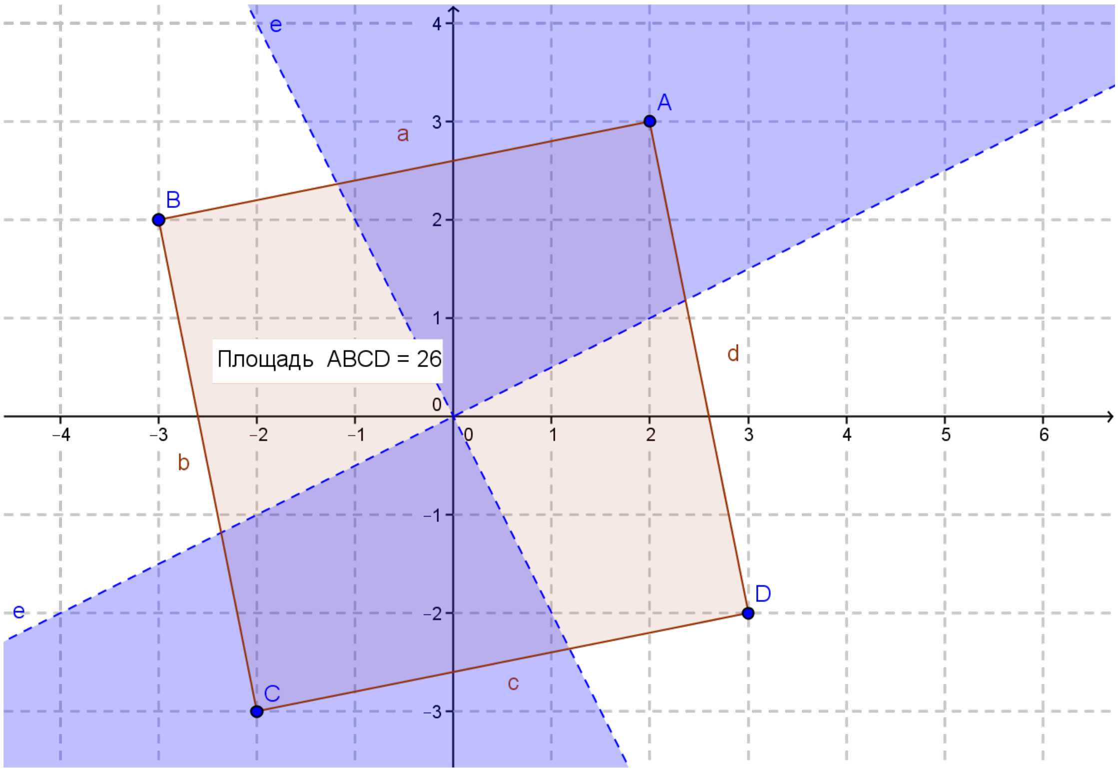
8. (13 баллов) На координатной плоскости закрашены все точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} |2x + 3y| + |3x - 2y| \leq 13, \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 \leq 0. \end{cases}$$

Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ: 13

Решение. Решение первого неравенства задает квадрат $ABCD$, решением второго является закрашенная часть плоскости между перпендикулярными прямыми $2x + y = 0$ и $x - 2y = 0$.



9. (15 баллов) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^3 - 7x^2 + (a^2 - 10a + 27)x - a^2 + 10a - 21 = 0$$

имеет два различных положительных корня.

Ответ: $\{5 - \sqrt{13}\} \cup \{2\} \cup [3;7] \cup \{8\} \cup \{5 + \sqrt{13}\}$

РешениеI. Заменим $a^2 - 10a + 21 = y$, уравнение примет вид

$$x^3 - 7x^2 + (y + 6)x - y = 0.$$

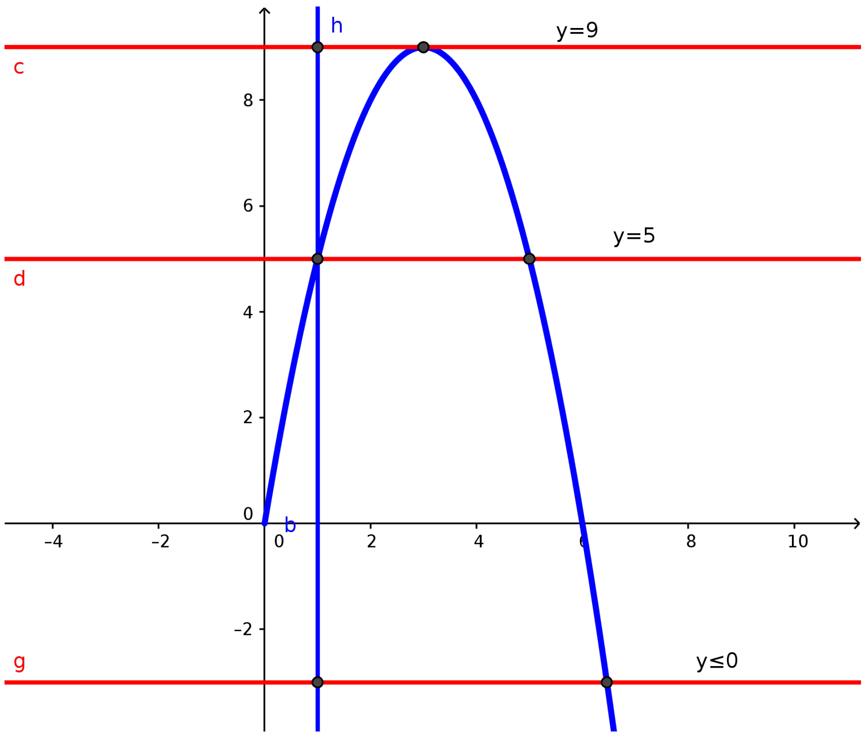
Сумма коэффицентов равна нулю, один из корней уравнения единица, следовательно, многочлен можно разложить на множители:

$$(x - 1)(x^2 - 6x + y) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = 6x - x^2. \end{array}\right.$$

На координатной плоскости строим множество решений совокупности в области $x > 0$.



Значения y, при которых имеется ровно два положительных корня, образуют множество

$$\left[\begin{array}{l} y = 9, \\ y = 5, \\ y \le 0. \end{array}\right.$$

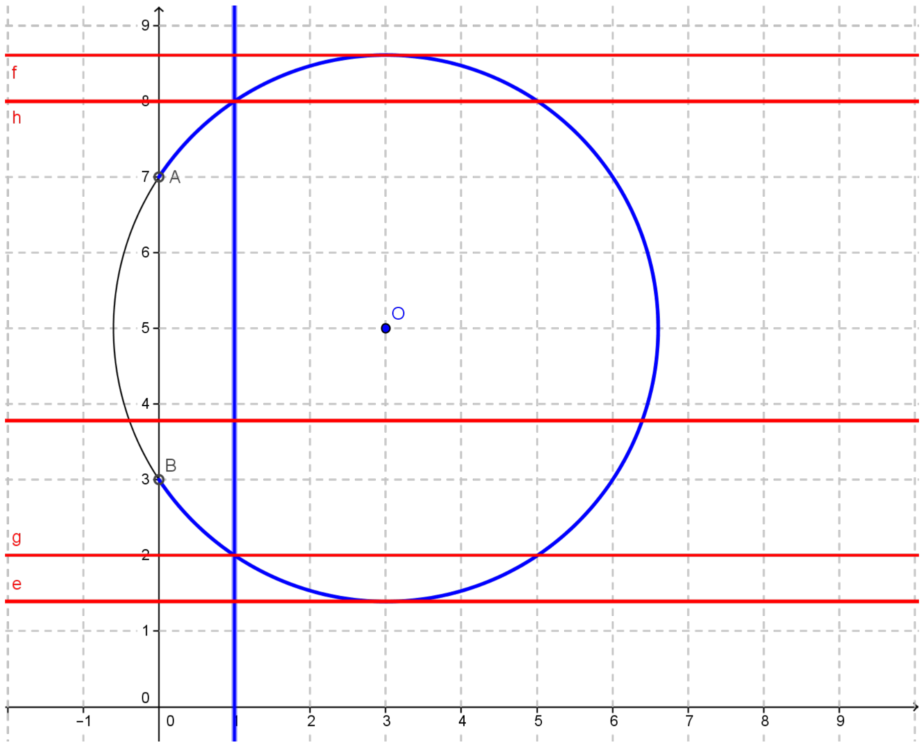
Выполнив обратную подстановку, находим все значения a.

РешениеII. Решение совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x^2 - 6x + a^2 - 10a + 21 = 0 \end{array}\right.$$

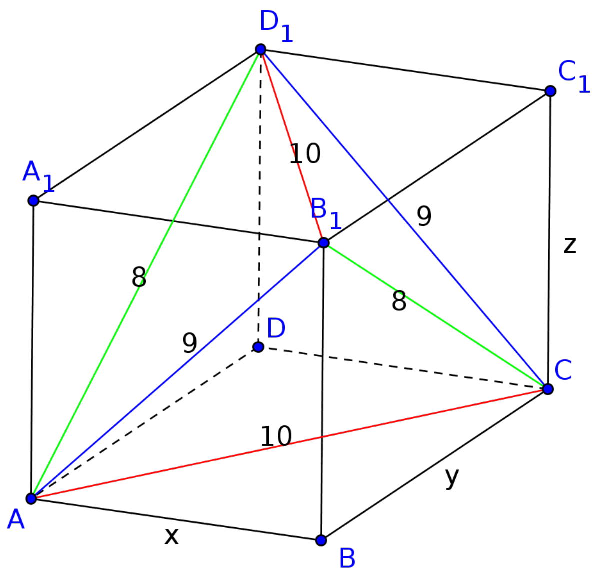
построим на плоскости, взяв a вместо y. Второе уравнение тогда определит окружность с центром в точке $O(3;5)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Синим отмечена та часть графика, которая лежит в области $x>0$; красные линии соответствуют случаям двух положительных решений.

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ (x-3)^2+(a-5)^2=13. \end{array}\right.$$



10. (15 баллов) У тетраэдра все грани равные треугольники со сторонами 8, 9 и 10. Можно ли такой тетраэдр упаковать в коробку с внутренними размерами $5\times 8\times 8$?

Решение. Можно. Из условия следует, что у тетраэдра противоположные ребра равны. Любой тетраэдр можно вписать в параллелепипед как показано на рисунке.



У нашего параллелепипеда диагонали граней равны, поэтому он является прямоугольным. Измерения x, y, z находим по теореме Пифагора:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10^2, \\ x^2 + z^2 = 9^2, \\ y^2 + z^2 = 8^2. \end{cases}$$

$x = \sqrt{58,5} < 8$, $y = \sqrt{41,5} < 8$, $z = \sqrt{22,5} < 5$. Такой прямоугольный параллелепипед легко умещается в коробко с размерами $5 \times 8 \times 8$.