11 класс.

1. Непостоянная функция $f(x)$ для всех действительных значений x удовлетворяет равенству

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{3}f(x).$$

Докажите, что $f(x)$ периодична и приведите пример такой функции.

Решение. $3f(x)=\sqrt{3}f(x+1)+\sqrt{3}f(x-1)=f(x+2)+f(x)+f(x)+f(x-2)$. Откуда $f(x)=f(x+2)+f(x-2)=f(x+4)+f(x)+f(x-2)$, т. е. $f(x+4)=-f(x-2)$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Тогда $f(x)=-f(x+6)=f(x+12)$. Функция $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{6}+\sin\dfrac{\pi x}{6}$ удовлетворяет условию задачи.

2. Две стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны. Пусть M и N — середины сторон BC и CD соответственно, а P — точка пересечения AN и DM. Докажите, что если $AP=4PN$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. 1) Пусть $AB\|CD$. Проведем среднюю линию MK, пусть L — точка пересечения MK и AN. Пусть $PN=x$, тогда по условию $AN=5\cdot PN=5x$. Поскольку KL — средняя линия в $\triangle ADN$, то $LN=2{,}5x$. Следовательно, $LP=1{,}5x$. Треугольники DPN и LPM очевидно подобны с коэффициентом подобия 1,5. Обозначим $CN=DN=a$, тогда $LM=1{,}5a$. Кроме того, $KL=0{,}5a$, потому что это средняя линия. Тогда $KM=KL+LM=2a=CD$. Но если средняя линия трапеции равна одному из оснований, то это параллелограмм (удвоенная средняя линия равна сумме оснований).

2) Пусть $BC\|AD$. Проведем среднюю линию NK, пусть L — точка пересечения NK и DM. Треугольники APD и LPN очевидно подобны с коэффициентом подобия 4. Тогда если $AD=4a$, то $LN=a$. Отсюда следует, что $CM=2a$ (LN — средняя линия в $\triangle CDM$). Кроме того, $BM=CM$. Тогда $BC=2a+2a=4a=AD$ и $ABCD$ — параллелограмм.

3. Известно, что многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx-1$ имеет три различных положительных корня. Докажите, что $P(-1)<-8$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b$ и $x_1x_2x_3=1$. $P(-1)=-1+a-b-1=-2-(x_1+x_2+x_3)-(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=-2-(x_1+x_2+x_3+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})=-2-(x_1+\dfrac{1}{x_1})-(x_2+\dfrac{1}{x_2})-(x_3+\dfrac{1}{x_3})<-2-2-2-2=-8.$

4. На сфере радиуса 1 расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше n^2.

Решение. Пусть $A_1,\ldots,A_n$ данные точки, O — центр сферы. Обозначим $\vec{x_i}=\overrightarrow{OA_i}$. Тогда сумма квадратов расстояний между точками

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\vec{x_i}-\vec{x_j})^2=\frac{1}{2}\left(n\sum_{i=1}^{n}\vec{x_i}^{\,2}+n\sum_{j=1}^{n}\vec{x_j}^{\,2}-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{x_i}\vec{x_j}\right)=$$

$$=n^2-\sum_{i=1}^{n}\vec{x_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\vec{x_j}=n^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{x_i}\right)^2\leqslant n^2.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3|x+3a|+|x+a^2|+2x=a$$

не имеет решения.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(10;+\infty)$

Решение. Способ I. Рассмотрим функцию $f(x) = 3|x+3a| + |x+a^2| + 2x - a$. $f'(x) = 3 \cdot \dfrac{x+3a}{|x+3a|} + \dfrac{x+a^2}{|x+a^2|} + 2$, $x_1 = -3a$ и $x_2 = -a^2$ критические. При $x < x_1$ и $x < x_2$ $f'(x) = -2 \Longrightarrow f \searrow$; при $x > x_1$ $x > x_2$ $f'(x) = 6 \Longrightarrow f \nearrow$. Сверху функция f не ограничена, она непрерывна, а наименьшее значение достигается в точке $-3a$: если $-3a < x < -a^2$, то $f'(x) = 4 > 0$; если же $-a^2 < x < -3a$, то $f'(x) = 0$. Все значения функции должны быть положительны. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(-3a) > 0$. Получаем следующее неравенство

$$|a^2 - 3a| > 7a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 3a > 7a, \\ a^2 - 3a < -7a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 10, \\ a < 0. \end{array}\right.$$

Способ II. Рассмотрим функцию $f(x) = 3|x+3a|+|x+a^2|+2x-a$. Нам требуется найти все такие значения параметра a, что $f(x)$ не обращается в нуль нигде на числовой оси. Сразу заметим, что $f(x)$ непрерывна на всей оси.
Обозначим $x_1 = -3a$, $x_2 = -a^2$. Сравним эти числа: $x_1 > x_2$ тогда и только тогда, когда $a^2 - 3a > 0$, т.е., $a \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.
1) Пусть $x_1 > x_2$, т.е., $a \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. На интервале $(-\infty, x_1]$ оба модуля раскрываются с минусом и $f(x)$ — линейная функция с угловым коэффициентом -4, следовательно, убывает. На отрезке $[x_2, x_1]$ первый модуль раскрывается с минусом, второй — с плюсом, следовательно, $f(x)$ — постоянная функция. На интервале $[x_1, +\infty)$ функция $f(x)$ — линейная с угловым коэффициентом 6, следовательно, возрастает. Из вышеуказанного следует, что для всех x функция $f(x) \geqslant f(x_1)$. Следовательно, для того, чтобы уравнение $f(x) = 0$ не имело решения, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_1) > 0$.
Имеем $f(x_1) = |-3a + a^2| - 6a - a = a^2 - 10a$. Решением неравенства $a^2 - 10a > 0$ является множество $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$. Все оно содержится во множестве $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.
2) Пусть $x_1 < x_2$, т.е., $a \in (0, 3)$. Тогда на интервале $(-\infty, x_2]$ оба модуля раскрываются с минусом и $f(x)$ — линейная функция с угловым коэффициентом -4, следовательно, убывает. На отрезке $[x_1, x_2]$ первый модуль раскрывается с плюсом, второй — с минусом, следовательно, $f(x)$ — линейная с угловым коэффициентом 4. На интервале $[x_2, +\infty)$ функция $f(x)$ — линейная с угловым коэффициентом 6, следовательно, возрастает на обоих этих промежутках. Тогда $x = x_1$ — точка минимума функции и для того, чтобы уравнение $f(x) = 0$ не имело решения, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_1) > 0$. В этом случае $f(x_1) = |-3a + a^2| - 6a - a = 3a - a^2 - 7a = -(a^2 + 4a)$. Решением неравенства $-a(a+4) > 0$ служит интервал $(-4, 0)$. Он имеет пустое пересечение с множеством $(0, 3)$, следовательно в этом случае ни одно значение a не является решением задачи.
3) Пусть $x_1 = x_2$, т.е., $a \in \{0, 3\}$. Заметим, что в этом случае, аналогично случаю 2) точка $x = x_1$ есть точка минимума функции, и, опять же, $f(x_1) = 0 + 0 - 7a$ должно быть положительно, что не выполняется при $a = 0$ и $a = 3$.