Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Стреляя по мишени, каждым своим выстрелом спортсмен выбивал только восемь, девять или десять очков (все эти очки были выбиты не менее одного раза). Сделав более 11 выстрелов, в сумме он выбил 100 очков. Сколько 8-очковых выстрелов сделал спортсмен? (5 баллов)

2. Для любых натуральных значений m и n ($n > 1$) определена функция $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt[n]{3^m}}{\sqrt[n]{3^m}+3}$. Вычислите сумму

$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{3}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{4039}{2020}\right)+f\left(\frac{4040}{2020}\right)$. (5 баллов)

3. Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{x+y-1}+x^4+y^4-\frac{1}{8}\leq 0$. В ответ запишите наибольшее значение произведения xy для всех найденных пар $(x; y)$. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно переставить буквы ОЛИМПИАДА так, чтобы не было идущих подряд в таком порядке букв ЛАМПА (тождественная перестановка тоже считается)? (12 баллов)

5. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно: $a_1 = a_2 = 1$,

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n. Какой цифрой оканчивается a_{2020}? (12 баллов)

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1; 0)$, а его катеты лежат на прямых $y = -2$ и $x = 0$? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC со стороной $AB = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE = OF$. Найдите длину отрезка EF, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$, и $AB \neq BC$. Результат округлите до десятых. (16 баллов)

8. Укажите наибольшее значение параметра a, при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} y = 1-\sqrt{x}, \\ a-2(a-y)^2 = \sqrt{x}. \end{cases}$$

(16 баллов)

9. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$, длина меньшего основания BC которой равна $4\sqrt{11}$. Диагонали трапеции AC и BD пересекаются в точке O, отношение площадей треугольников AOB и BOC равно $3:2$, площадь треугольника DOC равна $132\sqrt{2/25}$. Все боковые ребра пирамиды $TABCD$ наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите объем пирамиды $TBMNC$, где точки M и N – середины ребер TA и TD соответственно. (16 баллов)

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 2

1. Сопротивление на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Какова должна быть ширина сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметра $15\sqrt{3}$, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим? (5 баллов)

2. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $xy = 20 - 3x + y$. Для каждой найденной пары (x, y) вычислите произведение xy. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

3. Найдите все натуральные решения неравенства

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{45} + \frac{4}{117} + \cdots + \frac{4}{16n^2 - 8n - 3} > n - 5.$$

В ответ запишите сумму всех найденных решений. (6 баллов)

4. Имеется неограниченный запас квадратных стекол 10 цветов. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в оконную раму 2×2, чтобы какой-нибудь цвет встречался и в верхней и в нижней половине окна. (12 баллов)

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3 - 5t - 3 = 0$. Найти $x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$. (12 баллов)

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1; 3)$, а его катеты лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$? (12 баллов)

7. В треугольнике *ABC* со сторонами $AB = 3$ и $BC = 1$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке *O*, причем $OE = OF$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *AEF*. Результат округлите до сотых. (16 баллов)

8. Найдите все целые значение параметра *a,* при которых система $\begin{cases} x - 2y = y^2 + 2, \\ ax - 2y = y^2 + x^2 + 0,25a^2. \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение. В ответе укажите сумму найденных значений параметра a .

(16 баллов)

9. Основанием пирамиды *TABCD* является равнобедренная трапеция *ABCD*, длина меньшего основания *BC* которой равна $\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции *ABCD*, на которые ее делит средняя линия, равно $5:7$. Все боковые грани пирамиды *TABCD* наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Плоскость *AKN*, где точки *K* и *N* – середины ребер *TB* и *TC* соответственно, делит пирамиду на две части. Найдите объем большей части. (16 баллов)