## Решение варианта № 1

**1.** Стреляя по мишени, каждым своим выстрелом спортсмен выбивал только восемь, девять или десять очков (все эти очки были выбиты не менее одного раза). Сделав более 11 выстрелов, в сумме он выбил 100 очков. Сколько 8-очковых выстрелов сделал спортсмен? (5 баллов)

**Решение.** $8x+9y+10z=100,\ x,y,z\in\mathbb{N} \Rightarrow\ 8(x+y+z)<100$

$$\Rightarrow\ 11<x+y+z<\frac{100}{8}=12{,}5\quad \Rightarrow x+y+z=12$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} x+y+z=12 \\ 8x+9y+10z=100 \end{cases} \Rightarrow\ \begin{cases} x+y+z=12 \\ 96+y+2z=100 \end{cases} \Rightarrow\ \begin{cases} x+y+z=12 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow y=2,\ z=1,\ x=9.$$

**Ответ:** 9.

**2.** Для любых натуральных значений $m$ и $n$ $(n>1)$ определена функция $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt[n]{3^m}}{\sqrt[n]{3^m}+3}$. Вычислите сумму

$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{3}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{4039}{2020}\right)+f\left(\frac{4040}{2020}\right)$. (5 баллов)

**Решение.** Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{3^x}{3^x+3}$. Имеем

$$f(x)+f(2-x)=\frac{3^x}{3^x+3}+\frac{3^{2-x}}{3^{2-x}+3}=\frac{3^x}{3^x+3}+\frac{9}{9+3\cdot 3^x}=\frac{3^x}{3^x+3}+\frac{3}{3+3^x}=1$$

Тогда $f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{4039}{2020}\right)=f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{4038}{2020}\right)=\cdots=f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f\left(\frac{2021}{2020}\right)=1$

$$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{3}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{4039}{2020}\right)+f\left(\frac{4040}{2020}\right)=$$

$$=2019+f(1)+f(2)=2019+0{,}5+0{,}75=2020{,}25.$$

**Ответ:** 2020,25.

**3.** Найдите все пары действительных чисел $(x;y)$, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{x+y-1}+x^4+y^4-\frac{1}{8}\le 0$. В ответ запишите наибольшее значение произведения $xy$ для всех найденных пар $(x;y)$. (6 баллов)

**Решение.** ОДЗ: $x+y\ge 1.$ Докажем справедливость неравенства $x^4+y^4\ge 1/8$ при этом условии. Для любых $x$ и $y$ справедливо неравенство

$$(x+y)^2\ge 4xy\quad\Rightarrow\quad \frac{(x+y)^2}{2}\ge 2xy.$$

Тогда $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\ge\frac{(x+y)^2}{2}\ge\frac{1}{2},\quad x^4+y^4\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\ge\frac{1}{8}.$

Исходное неравенство в условии задачи выполняется при условии

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^4+y^4=1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1-2xy, \\ \left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2=1/8, \end{cases} \Rightarrow (1-2xy)^2-2(xy)^2=1/8, \quad t=xy,$$

$$(1-2t)^2-2t^2=1/8, \quad 2t^2-4t+7/8=0, \quad t=7/4,\, t=1/4.$$

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=7/4, \end{cases}$ нет решений. 2) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=1/4, \end{cases} \begin{cases} x=1/2, \\ y=1/2, \end{cases} \Rightarrow xy=0,25.$

**Ответ:** 0,25.

**4.** Сколькими способами можно переставить буквы ОЛИМПИАДА так, чтобы не было идущих подряд в таком порядке букв ЛАМПА (тождественная перестановка тоже считается)? (12 баллов)

**Решение.** Среди данных 9 букв две пары одинаковых, поэтому число перестановок $\frac{9!}{2!2!}=90720$. Фрагмент слова «ЛАМПА» может начинаться с 1-го, 2-го, 3-го, 4-го или 5-го места, а остальные 4 буквы (Д, И, И, О) можно расставить на остальных местах $\frac{4!}{2!}=12$ способами. Так что число недопустимых перестановок 5*12=60.

**Ответ:** 90660.

**5.** Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно: $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных $n$. Какой цифрой оканчивается $a_{2020}$? (12 баллов)

**Решение.** Индукцией доказывается, что

1) четность чисел чередуется так: ННЧННЧННЧ…
2) число с номером, кратным 5, делится на 5.

Поскольку 2020 делится на 5, а на 3 делится с остатком 1, число $a_{2020}$ нечетно и кратно 5.

**Ответ:** 5.

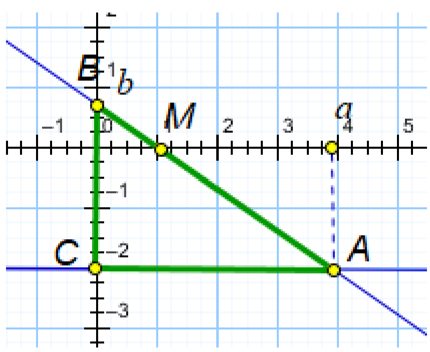
**6.** Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1;0)$, а его катеты лежат на прямых $y=-2$ и $x=0$? (12 баллов)

**Решение.** $AB: \quad y=kx+b, \quad M\in AB \Rightarrow b=-k$

$$A(a;-2)\in AB \Rightarrow -2=ka+b \Rightarrow a=1-\frac{2}{k}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CA=\frac{1}{2}(b+2)a=\frac{1}{2}(2-k)(1-2/k),$$

$$S'=\frac{(2-k)(2+k)}{2k^2}=0,\ k_{\min}=-2, \quad S_{\min}=4.$$



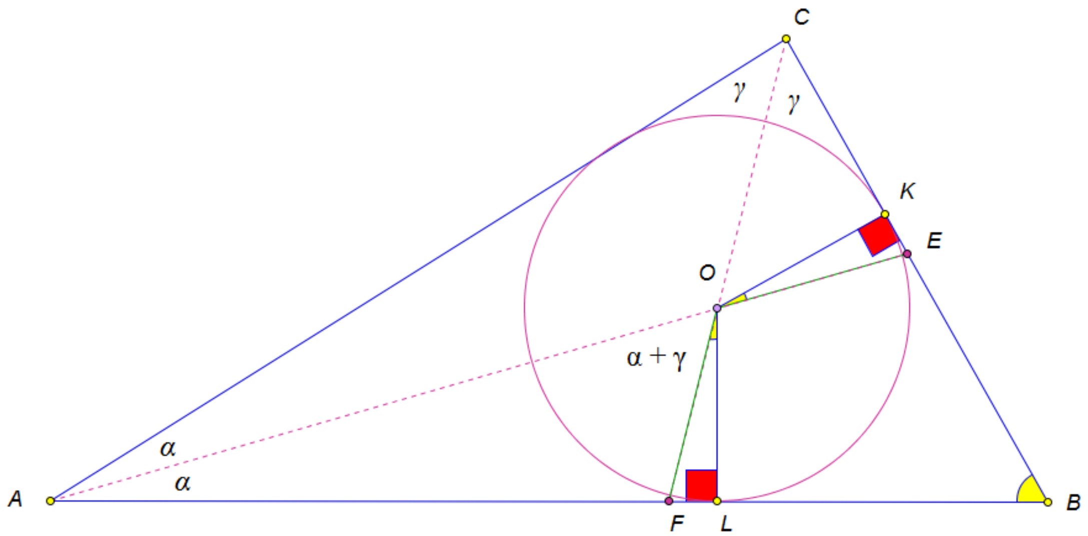

**Ответ:** 4.

**7.** В треугольнике $ABC$ со стороной $AB = 3$ проведены биссектрисы $AE$ и $CF$, которые пересекаются в точке $O$, причем $OE = OF$. Найдите длину отрезка $EF$, если площадь треугольника $ABC$ равна $3\sqrt{3}$, и $AB \neq BC$. Результат округлите до десятых. (16 баллов)

**Решение.**

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника $AOC$. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки $O$ опустим высоты $OL$ и $OK$ на основания $AB$ и $BC$, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.




3. Заметим, что основание $K$ высоты $OK$ может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки $E$. Точно также, возможны два варианта расположения точки $L$ по отношению к точке $F$. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника $AOL$ имеем: $\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если $L$ находится справа от $F$; $\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если $L$ находится слева $F$. Аналогично, из прямоугольного треугольника $KOE$ имеем:

$\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка $K$ находится выше точки $E$; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка $K$ находится ниже точки $E$.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник $ABC$ по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. Находим $BC$: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle B,\ BC = \dfrac{2S_{ABC}}{AB \sin 60°} = 4.$

8. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = 13,\ AC = \sqrt{13}.$

9. По свойству биссектрисы имеем:

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC},\ BE=x,\ \frac{x}{4-x}=\frac{3}{\sqrt{13}},\quad \frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AC},\ BF=y,\ \frac{y}{3-y}=\frac{4}{\sqrt{13}},$$

$$x=3(\sqrt{13}-3),\ y=4(4-\sqrt{13}).$$

10. По теореме косинусов находим

$$EF=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=9(\sqrt{13}-3)^2+16(4-\sqrt{13})^2-12(\sqrt{13}-3)(4-\sqrt{13})}\approx 1{,}7.$$

**Ответ:** 1,7.

**8.** Укажите наибольшее значение параметра *a,* при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} y=1-\sqrt{x}, \\ a-2(a-y)^2=\sqrt{x}. \end{cases}$$

(16 баллов)

**Решение:**

Из первого уравнения системы $\begin{cases} y=1-\sqrt{x} \\ a-2(a-y)^2=\sqrt{x} \end{cases}$ выразим $\sqrt{x}$ и подставим во второе уравнение: $\begin{cases} \sqrt{x}=1-y \\ a-2(a-y)^2=1-y \end{cases}$, учитывая, что $1-y\geq 0,$ решим полученное квадратное уравнение:

$$a-2(a-y)^2=1-y \quad \Rightarrow \quad 2y^2-y(4a+1)+2a^2-a+1=0\ .$$

$$y_{1,2}=\frac{(4a+1)\pm\sqrt{(4a+1)^2-8(2a^2-a+1)}}{4}=\frac{4a+1\pm\sqrt{16a-7}}{4}$$

Для существования одного решения уравнения, а значит, и исходной системы, надо либо чтобы дискриминант был равен нулю и при этом корень был не больше единицы, либо из двух корней один удовлетворяет условию, второй нет.

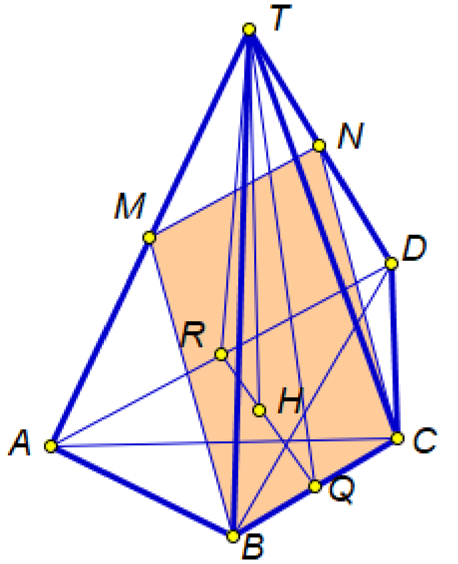
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=16a-7=0 \\ \dfrac{4a+1}{4}\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} D=16a-7>0 \\ \left[\begin{array}{l} f(1)=2-(4a+1)+2a^2-a+1<0 \\ \begin{cases} f(1)=2-(4a+1)+2a^2-a+1=0 \\ \dfrac{4a+1}{4}>1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=7/16 \\ \begin{cases} a>7/16 \\ \left[\begin{array}{l} (a-2)(a-0{,}5)<0 \\ \begin{cases} (a-2)(a-0{,}5)=0 \\ a>0{,}75 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=7/16 \\ 0{,}5<a<2 \\ a=2 \end{array}\right.$$

Следовательно, наибольшее значение параметра, при котором существует единственное решение системы $a=2$ .

**Ответ: 2.**

**9**. Основанием пирамиды *TABCD* является трапеция *ABCD*, длина меньшего основания *BC* которой равна $4\sqrt{11}$. Диагонали трапеции *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*, отношение площадей треугольников *AOB* и *BOC* равно 3 : 2, площадь треугольника *DOC* равна $132\sqrt{2/25}$. Все боковые ребра пирамиды *TABCD* наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды *TBMNC*, где точки *M* и *N* – середины ребер *TA* и *TD* соответственно. (16 баллов)

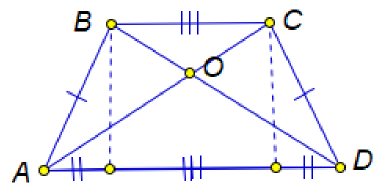
**Решение.**



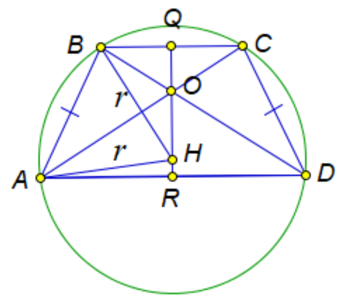

Пусть *TH* – высота пирамиды. Поскольку все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом, то *H* – центр окружности, описанной около основания. Отсюда следует, что трапеция равнобокая. Из условия следует, что $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{3}{2}=\frac{AO}{OC}$. Треугольники *AOD* и *COB* подобны, и

$\frac{AD}{BC}=\frac{3}{2}=\frac{AO}{OC}$, $AD=\frac{3BC}{2}=6\sqrt{11}$. Поскольку

$\frac{OD}{BO}=\frac{3}{2}=\frac{S_{DOC}}{S_{BOC}}$, $S_{BOC}=\frac{2S_{DOC}}{3}=\frac{88\sqrt{2}}{5}$. Обозначим $h_1$ и $h_2$ высоты треугольников *BOC* и *AOD*, проведенные к основаниям *BC* и *AD* соответственно. Тогда

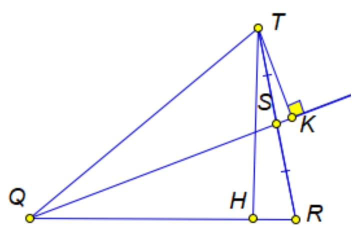



$h_1=\frac{2S_{BOC}}{BC}=\frac{4\sqrt{22}}{5}$, $h_2=\frac{3h_1}{2}=\frac{6\sqrt{22}}{5}$. Высота трапеции $h=h_1+h_2=2\sqrt{22}$. Находим боковые стороны трапеции $AB=CD=3\sqrt{11}$. Пусть *Q* и *R* – середины сторон *BC* и *AD* соответственно. Обозначим $HR=x$, радиус описанной окружности *r*. Тогда $r^2=BQ^2+QH^2=44+(2\sqrt{22}-x)^2$, и $r^2=AR^2+HR^2=99+x^2$. Отсюда находим $HR=\frac{3\sqrt{22}}{8}$,




$QH=\frac{13\sqrt{22}}{8}$, $r=\frac{33\sqrt{6}}{8}$. Высоту пирамиды *TH* найдем из прямоугольного треугольника *TAH* с углом $\angle TAH=30^\circ$, $AH=r$.

Имеем $TH=r\operatorname{tg}30^\circ=\frac{33\sqrt{2}}{8}$.




Пусть *TK* – высота пирамиды *TBMNC*, *TK* – перпендикуляр, опущенный из точки *T* на прямую *QS*, где *S* – середина *MN*. Вычислим объем пирамиды *TBMNC*:

$V_{TBMNC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{MN+BC}{2}\cdot QS\cdot TK$. Площадь треугольника *TQS* можно вычислить двумя способами:

$$S_{TQS}=\frac{QR\cdot TH}{4},\ S_{TQS}=\frac{QS\cdot TK}{2},\quad QS\cdot TK=\frac{QR\cdot TH}{2},\ \text{и}\ V_{TBMNC}=\frac{1}{6}\cdot\frac{MN+BC}{2}\cdot QR\cdot TH.$$

Отсюда получаем $V_{TBMNC} = 105,875.$

**Ответ:** 105,875.

## Решение варианта № 2

**1.** Сопротивление на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Какова должна быть ширина сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметра $15\sqrt{3}$, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим? (5 баллов)

**Решение.**

$F(a)=kab^2$, $a$ – ширина балки, $b$ – высота балки. Поскольку $b^2=225\cdot 3-a^2$, то

$F(a)=ka(225\cdot 3-a^2)=k(225\cdot 3a-a^3)$, $F'(a)=k(225\cdot 3-3a^2)=3k(225-a^2)$.

Производная равна нулю и меняет знак с плюса на минус при $a=15$, при этом сопротивление на изгиб будет наибольшим.

**Ответ:** 15.

**2.** Найдите все пары целых чисел $(x,y)$, удовлетворяющих уравнению $xy=20-3x+y$. Для каждой найденной пары $(x,y)$ вычислите произведение $xy$. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

**Решение.** $xy=20-3x+y$, $xy=17+3(1-x)+y$, $(x-1)y+3(x-1)=17$, $(x-1)(y+3)=17$. Поскольку $x$ и у целые, то имеем четыре случая:

1) $\begin{cases} y+3=17, \\ x-1=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14, \\ x=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+3=-17, \\ x-1=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-20, \\ x=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+3=1, \\ x-1=17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ x=18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y+3=-1, \\ x-1=-17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4, \\ x==16. \end{cases}$

**Ответ:** 56.

**3.** Найдите все натуральные решения неравенства

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{45}+\frac{4}{117}+\cdots+\frac{4}{16n^2-8n-3}>n-5.$$

В ответ запишите сумму всех найденных решений. (6 баллов)

**Решение.** Имеем $16n^2-8n-3=(4n-3)(4n+1)$, $\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}=\dfrac{4}{16n^2-8n-3}$,

$$\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}>n-5,$$

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}>n-5,\ 1-\frac{1}{4n+1}>n-5,\ 4n^2-23n-5<0,$$

$$n\in\left(\frac{23-\sqrt{609}}{8};\frac{23-\sqrt{609}}{8}\right)\cap\mathbb{N}, 1+2+3+4+5=15.$$

**Ответ:** 15.

**4.** Имеется неограниченный запас квадратных стекол 10 цветов. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в оконную раму 2×2, чтобы какой-нибудь цвет встречался и в верхней и в нижней половине окна. (12 баллов)

**Решение.** Если в верхней половине стёкла одного цвета (одного из 10), то выбрать цвета нижних стёкол можно $10^2 - 9^2 = 19$ способами. Если же верхние стёкла разные (10*9=90 способов выбрать), то выбрать цвета нижних можно $10^2 - 8^2 = 36$ способами.
Итого 10*19 + 90*36 = 190 + 3240 = 3430 способов.

**Ответ:** 3430.

**5.** Пусть $x, y, z$ – корни уравнения $t^3 - 5t - 3 = 0$. Найти $x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$. (12 баллов)

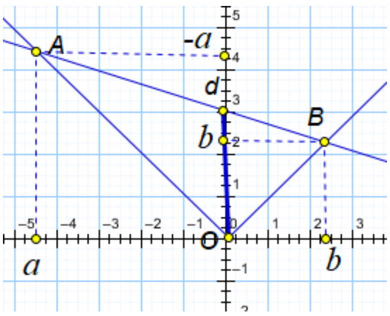
**Решение.** Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т.к. P(-100)<0, P(-1)>0, P(0)<0, P(100)>0. По теореме Виета x+y+z=0, xy+xz+yz=-5, xyz=3.

$$x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 = (5x+3)(5y+3) + (5x+3)(5z+3) + (5y+3)(5z+3)$$
$$= 25(xy+xz+yz) + 30(x+y+z) + 27 = -98$$

**Ответ:** -98.

**6.** Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(1;3)$, а его катеты лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$? (12 баллов)

**Решение.**




$$AB:\quad y = kx + d,\quad M \in AB \Rightarrow d = 3 - k$$

$$A(a;-a) \in AB \Rightarrow -a = ka + 3 - k \Rightarrow a = \frac{3-k}{k+1},$$

$$B(b;b) \in AB \Rightarrow b = kb + 3 - k \Rightarrow b = \frac{k-3}{k-1},$$

$$S_{ABO} = \frac{1}{2}d\cdot(b-a) == \frac{3-k}{2}\left(\frac{k-3}{k-1} - \frac{k-3}{k+1}\right) = \frac{(k-3)^2}{1-k^2},$$

$$S' = \frac{2(k-3)(1-3k)}{(k^2-1)^2} = 0,\ k_{\min} = \frac{1}{3},\quad S_{\min} = 8.$$

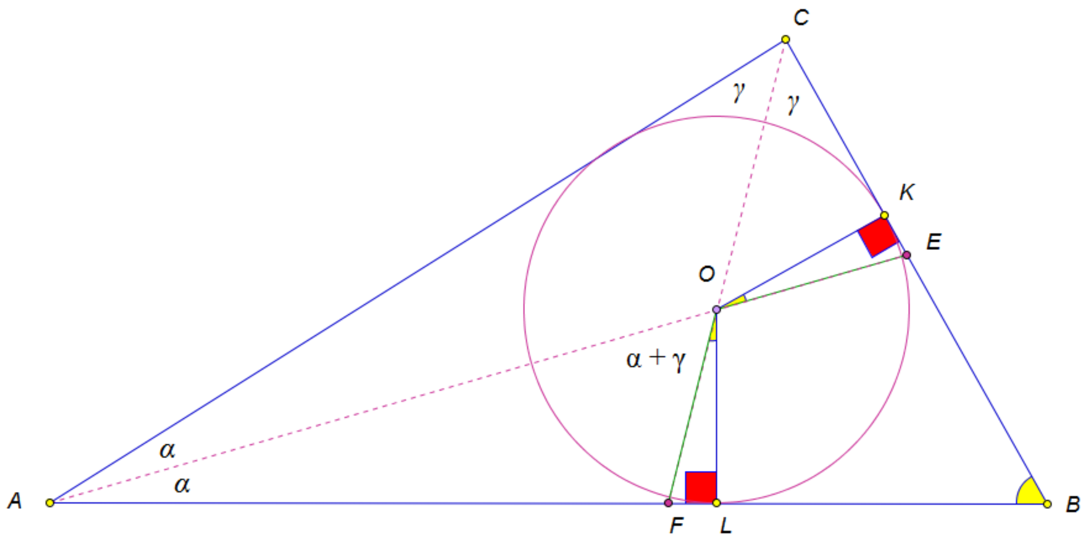
**Ответ:** 8.

**7.** В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 1$ проведены биссектрисы $AE$ и $CF$, которые пересекаются в точке $O$, причем $OE = OF$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $AEF$. Результат округлите до сотых. (16 баллов)

**Решение.**

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника $AOC$. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки $O$ опустим высоты $OL$ и $OK$ на основания $AB$ и $BC$, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.




3. Заметим, что основание $K$ высоты $OK$ может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки $E$. Точно также, возможны два варианта расположения точки $L$ по отношению к точке $F$. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника $AOL$ имеем:

$\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если $L$ находится справа от $F$;

$\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если $L$ находится слева $F$.

Аналогично, из прямоугольного треугольника $KOE$ имеем:

$\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка $K$ находится выше точки $E$; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка $K$ находится ниже точки $E$.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник $ABC$ по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = 7,\ AC = \sqrt{7}.$

8. По свойству биссектрисы имеем: $\dfrac{BF}{AF} = \dfrac{BC}{AC},\ AF = x,\ \dfrac{3-x}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{7}},\ x = \dfrac{7-\sqrt{7}}{2}.$

9. $\angle AEF = 30°,\quad R_{onAEF} = \dfrac{AF}{2\sin 30°} = \dfrac{7-\sqrt{7}}{2} \approx 2{,}18.$

**Ответ:** 2,18.

**8.** Найдите все целые значение параметра *a,* при которых система $\begin{cases} x-2y=y^2+2, \\ ax-2y=y^2+x^2+0,25a^2. \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. В ответе укажите сумму найденных значений параметра $a$ .

(16 баллов)

**Решение:** Преобразуем систему

$$\begin{cases} x-1=(y+1)^2, \\ (y+1)^2+(x-0,5a)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=(y+1)^2, \\ x-2+(x-0,5a)^2=0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$x^2+x(1-a)+(a^2-8)/4=0, \quad D=(a-1)^2-(a^2-8)=9-2a$$

Решение существует при $a \le 9/2$ , $x=\dfrac{a-1\pm\sqrt{9-2a}}{2}$ , причем $x \ge 1.$ Для существования решения должны выполняться условия

$$\begin{cases} D=9-2a \ge 0 \\ \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(1)=\left(a^2-4a\right)/4>0 \\ \dfrac{a-1}{2}>1 \end{cases} \\ f(1)=\left(a^2-4a\right)/4 \le 0 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 9/2 \\ \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a(a-4)>0 \\ a-1>2 \end{cases} \\ a(a-4) \le 0 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \ a \in [0,\, 9/2].$$

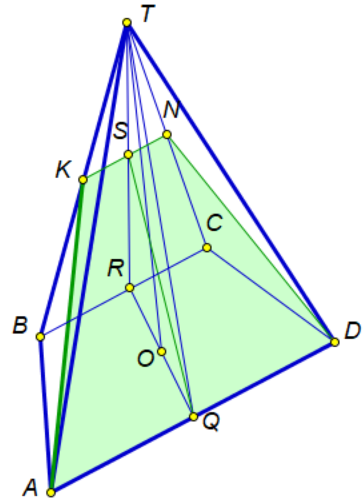
Суммируя целые значения параметра, получим 0+1+2+3+4=10.

**Ответ:** 10.

**9**. Основанием пирамиды *TABCD* является равнобедренная трапеция *ABCD*, длина меньшего основания *BC* которой равна $\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции *ABCD*, на которые ее делит средняя линия, равно $5:7$. Все боковые грани пирамиды *TABCD* наклонены к плоскости основания под углом 30°. Плоскость *AKN*, где точки *K* и *N* – середины ребер *TB* и *TC* соответственно, делит пирамиду на две части. Найдите объем большей части. (16 баллов)

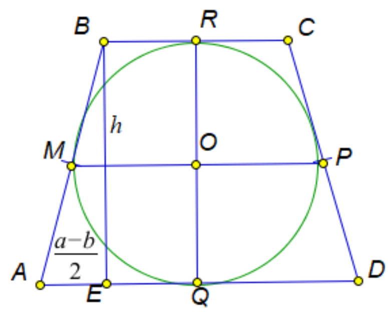
**Решение.**

Пусть $TO$ – высота пирамиды. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, то $O$ – центр окружности, вписанной в основание. Пусть $MP$ – средняя линия трапеции, $AD = a$, $BC = b = \sqrt{3}$. По условию имеем

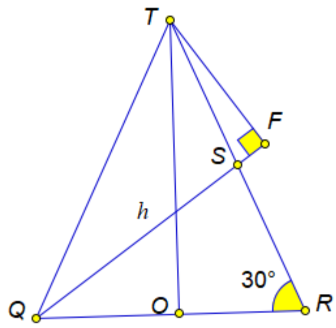



$$S_{MBCP} = 5x,\ S_{AMPD} = 7x, \qquad \frac{5}{7} = \frac{b + (a+b)/2}{a + (a+b)/2} = \frac{a+\sqrt{3}}{3a+\sqrt{3}},$$

$a = 2\sqrt{3}$. Поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = a + b$, $AB = CD = 1{,}5\sqrt{3}$. Вычислим высоту трапеции $h = \sqrt{AB^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{6}$. Через точку $O$ проведем прямую, перпендикулярную основаниям трапеции и пересекающую эти основания в точках $Q$ и $R$, $OR = h$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$, то высота пирамиды $TO = \frac{1}{2}QR\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.




Пусть $TF$ – высота пирамиды $TAKND$, $TF$ – перпендикуляр, опущенный из точки $T$ на прямую $QS$, где $S$ – середина $KN$. Вычислим объем пирамиды $TAKND$:




$V_{TAKND} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + KN}{2} \cdot QS \cdot TF$. Площадь треугольника $TQS$ можно вычислить двумя способами:

$S_{TQS} = \frac{QR \cdot TO}{4}$, $S_{TQS} = \frac{QS \cdot TF}{2}$, $\quad QS \cdot TF = \frac{QR \cdot TO}{2}$, и

$V_{TAKND} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AD + KN}{2} \cdot QR \cdot TO$. Отсюда получаем $V_{TAKND} = 5/8$.

Вычислим объем пирамиды $TABCD$:

$$V_{TABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot QR \cdot TO = \frac{3}{2}.$$

$$V_{TABCD} - V_{TAKND} = \frac{3}{2} - \frac{5}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

**Ответ:** 0,875.