Решение варианта № 1

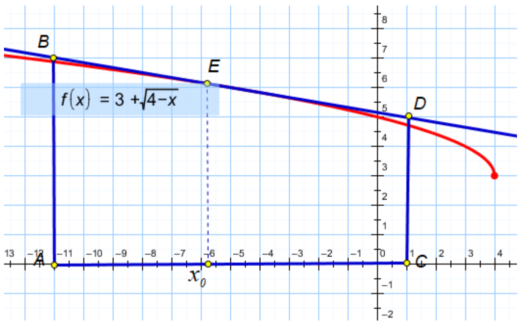
1. В турнире по волейболу участвовало n команд из города A и $2n$ из города B. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами из города B, к числу побед, одержанных командами из города A, равно 3 : 4. Найдите n, если известно, что ничьих в турнире не было. (12 баллов)

Решение. Количество игр, в которых участвовали только команды из города A равно $\frac{(n-1)n}{2}$. В этих играх команды из города A одержали $\frac{(n-1)n}{2}$ победу. Количество игр, в которых участвовали только команды из города B равно $\frac{(2n-1)2n}{2}$. В этих играх команды из города B одержали $(2n-1)n$ победу. Число встреч команд города А с командами города B равно $2n^2$. Пусть m – число побед в этих встречах, одержанных командами из города A, тогда команды из города B одержали в этих встречах $2n^2-m$ побед. Всего команды из города A одержали $\frac{(n-1)n}{2}+m$ побед, а из города B одержали $(2n-1)n+2n^2-m$ побед. По условию имеем $\dfrac{\frac{(n-1)n}{2}+m}{(2n-1)n+2n^2-m}=\frac{4}{3}$,

$3n^2-3n+6m=32n^2-8n-8m,\ 14m=29n^2-5n,\ m=\frac{29n^2-5n}{14},\ \frac{29n^2-5n}{14}\le 2n^2,\ n^2-5n\le 0.$ Число n может быть равно 1, 2, 3, 4, 5. Подстановкой в равенство $m=\frac{29n^2-5n}{14}$, получаем, что m является целым числом только при $n = 5$.

Ответ: 5.

2. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy, расположенная между прямыми $x=-11$ и $x=1$, ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=3+\sqrt{4-x}$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-11\le x_0\le 1$? (12 баллов)



Решение. Составим уравнение касательной к графику функции $y=3+\sqrt{4-x}$ в точке с абсциссой x_0:

$$y_{кас}=-\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x-x_0)+3+\sqrt{4-x_0}.$$

Фигурой является трапеция с основаниями, равными $y_{кас}(-11)$ и $y_{кас}(1)$. Высота трапеции равна 12. Имеем

$$y_{кас}(-11)=\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(11+x_0)+3+\sqrt{4-x_0},\quad y_{кас}(1)=\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x_0-1)+3+\sqrt{4-x_0},$$

5. Найдите множество значений выражения $\dfrac{a\cos x + b\sin x + c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, где *x*, *a*, *b*, *c* – произвольные числа, такие, что $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. (20 баллов)

Решение: Пусть $\vec{n}=(a;b;c)$, $\vec{m}=(\cos x;\sin x;1)$. Тогда $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $|\vec{m}|=\sqrt{2}$. Рассмотрим функцию $f(x,a,b,c)=\dfrac{a\cos x+b\sin x+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|}=|\vec{m}|\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Множеством значений функции f является отрезок $E=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

Ответ: $E=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной *a* точка K является серединой ребра B_1C_1, точка L лежит на ребре C_1D_1, причем $D_1L=2C_1L$, точка N является серединой ребра AA_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки *K, L, N*. Опишите алгоритм построения сечения. Найдите площадь полученного сечения. (20 баллов)

Решение:

Алгоритм:

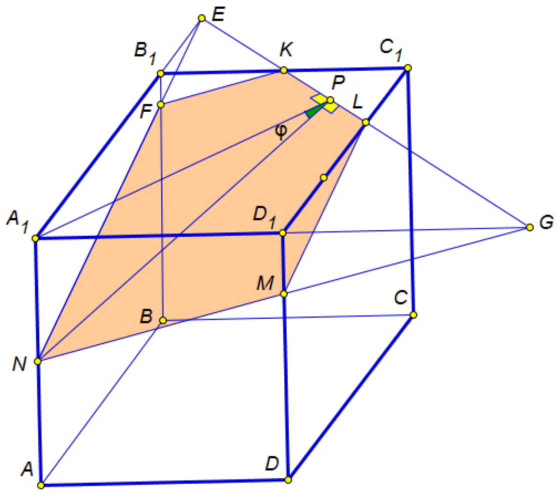
1) Соединяем *K* и *L*. *E* – точка пересечения прямых *KL* и A_1B_1.

2) Соединяем *E* и *N*. *F* – точка пересечения прямых *EN* и BB_1.

3) *G* – точка пересечения прямых *KL* и A_1D_1.

4) *M* – точка пересечения прямых *GN* и DD_1.

5) *FKLMN* – искомое сечение.



φ - угол наклона плоскости сечения к плоскости $A_1B_1C_1D_1$.

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{A_1B_1KLD_1}}{\cos\varphi}=\frac{a^2-a^2/12}{\cos\varphi}=\frac{11a^2}{12\cos\varphi}.$$

$$A_1P\cdot KL=2S_{A_1KL}=2(a^2-a^2/4-a^2/12-a^2/3)=2a^2/3.$$

$$A_1P=2a^2/(3KL)=4a/\sqrt{13},\ \cos\varphi=A_1P/NP=\frac{4a}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2/4+16a^2/13}}=\frac{8}{\sqrt{77}}.$$

$$S_{сеч}=\frac{11a^2\sqrt{77}}{96}.$$

Ответ: $\dfrac{11a^2\sqrt{77}}{96}$.

Решение варианта № 2

1 В турнире по баскетболу участвовало n команд из города A и $2n$ из города B. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами из города B, к числу побед, одержанных командами из города A, равно 14 : 19. Найдите n, если известно, что ничьих в турнире не было. (12 баллов)

Решение. Количество игр, в которых участвовали только команды из города A равно $\frac{(n-1)n}{2}$. В этих играх команды из города A одержали $\frac{(n-1)n}{2}$ победу. Количество игр, в которых участвовали только команды из города B равно $\frac{(2n-1)2n}{2}$. В этих играх команды из города B одержали $(2n-1)n$ победу. Число встреч команд города А с командами города B равно $2n^2$. Пусть m – число побед в этих встречах, одержанных командами из города A, тогда команды из города B одержали в этих встречах $2n^2-m$ побед. Всего команды из города A одержали $\frac{(n-1)n}{2}+m$ побед, а из города B одержали $(2n-1)n+2n^2-m$ побед. По условию имеем $\frac{\frac{(n-1)n}{2}+m}{(2n-1)n+2n^2-m}=\frac{19}{14}$,

$7n^2-7n+14m=76n^2-19n-19m,\quad 33m=69n^2-12n,\quad m=\frac{23n^2-4n}{11},\quad \frac{23n^2-4n}{11}\le 2n^2,\quad n^2-4n\le 0.$

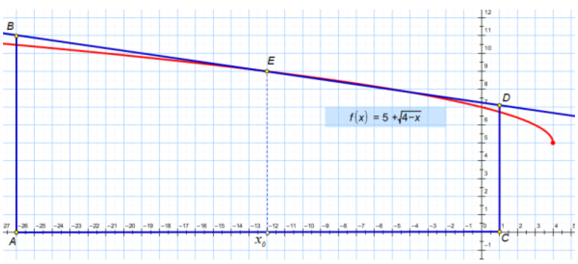
Число n может быть равно 1, 2, 3, 4. Подстановкой в равенство $m=\frac{23n^2-4n}{11}$ получаем, что m является целым числом только при n = 4.

Ответ: 4.

2. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy, расположенная между прямыми $x=-26$ и $x=2$, ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=5+\sqrt{4-x}$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-26\le x_0\le 2$? (12 баллов)

Решение. Решение. Составим уравнение касательной к графику функции $y=5+\sqrt{4-x}$ в точке с абсциссой x_0 :

$$y_{кас}=-\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x-x_0)+5+\sqrt{4-x_0}.$$



Фигурой является трапеция с основаниями, равными $y_{кас}(-26)$ и $y_{кас}(2)$. Высота трапеции равна 28. Имеем

$$y_{кас}(-26)=\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(26+x_0)+5+\sqrt{4-x_0},\quad y_{кас}(2)=\frac{1}{2\sqrt{4-x_0}}(x_0-2)+5+\sqrt{4-x_0},$$

$S=14(y_{кас}(-26)+y_{кас}(2))=14\left(\dfrac{x_0+12}{\sqrt{4-x_0}}+10+2\sqrt{4-x_0}\right)=14\left(\dfrac{20-x_0}{\sqrt{4-x_0}}+10\right)$. Находим производную

$S'=14\left(\dfrac{20-x_0}{\sqrt{4-x_0}}\right)'=\dfrac{-7(x_0+12)}{\sqrt{(4-x_0)^3}}$. Наименьшее значение функция $S(x_0)$ принимает при $x_0=-12$, $S_{\min}=S(-12)=504.$

Ответ: 504.

3. Найдите все натуральные числа $n\geq 2$, для которых верно равенство $4x_n+2y_n=20n^2+13n-33$, где $x_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n$, $y_n=1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2$. (20 баллов)

Решение: Пусть $z_n=1+2+\dots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$. Имеем

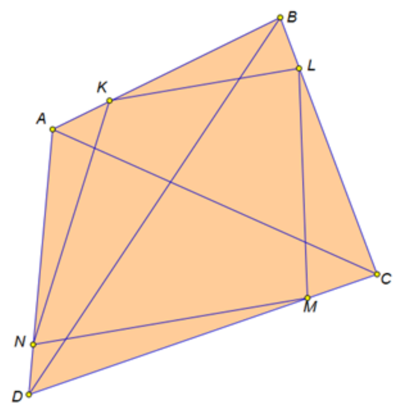
$$x_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n=(2+3+\dots n)+(3+4+\dots n)+\dots((n-1)+n)+n=$$
$$=(z_n-z_1)+(z_n-z_2)+\dots+(z_n-z_{n-1})=(n-1)z_n-(z_1+z_2+\dots+z_{n-1})=$$
$$=\frac{1}{2}\big((n-1)n(n+1)-(1^2+1+2^2+2+\dots+(n-1)^2+(n-1)\big)=$$
$$=\frac{1}{2}\big((n-1)n(n+1)-(y_n+z_{n-1})\big).$$

Подставим полученное выражение в равенство $4x_n+2y_n=20n^2+13n-33$. Получаем

$2\big((n-1)n(n+1)-(y_n+z_{n-1})\big)+2y_n=20n^2+13n-33$, $2(n-1)n(n+1)-n(n-1)=20n^2+13n-33$, $(n-1)(2n(n+1)-n)=(n-1)(20n+33)$, $2n^2-19n-33=0$, $n=11$.

Ответ: $n=11$.

4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 40. На сторонах AB, BC, CD, AD выбраны точки K,L,M,N соответственно, причем $AK:AB=BL:BC=CM:CD=DN:AD$. Найдите отношение $AK:KB$, если площадь четырехугольника $KLMN$ равна 25. (20 баллов)



Решение: $AK:AB=x$, $DN:AD=x$,

$AN:AD=(AD-ND):AD=1-x$,

$S_{AKN}=x(1-x)S_{ABD}$. Аналогично получаем $S_{CLM}=x(1-x)S_{BCD}$. Тогда $S_{AKN}+S_{CLM}=x(1-x)S_{ABCD}=100x(1-x)$.

Аналогично $S_{BLK}+S_{DNM}=x(1-x)S_{ABCD}=40x(1-x)$. Отсюда $S_{KLMN}=40-80x(1-x)$. Имеем уравнение $25=40-80x(1-x)$, $16x^2-16x+3=0$, $x=1/4$ или $x=3/4$.

Ответ: $1/4$ или $3/4$.

5. Найдите множество значений выражения $\dfrac{a\cos x - b\sin x + 2c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ где *x, a, b, c* – произвольные числа, такие, что $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. (20 баллов)

Решение: Пусть $\vec{n}=(a;b;c)$, $\vec{m}=(\cos x;-\sin x;2)$. Тогда $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $|\vec{m}|=\sqrt{5}$. Рассмотрим функцию $f(x,a,b,c)=\dfrac{a\cos x - b\sin x + 2c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|}=|\vec{m}|\cos\alpha=\sqrt{5}\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Множеством значений функции f является отрезок $E=[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$.

Ответ: $E=[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной *a* точка K является серединой ребра B_1C_1, точка L лежит на ребре C_1D_1, причем $D_1L=3C_1L$, точка N является серединой ребра AA_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки *K, L, N*. Опишите алгоритм построения сечения. Найдите площадь полученного сечения. (20 баллов)

Решение:

Алгоритм:

1) Соединяем K и L. E – точка пересечения прямых KL и A_1B_1.

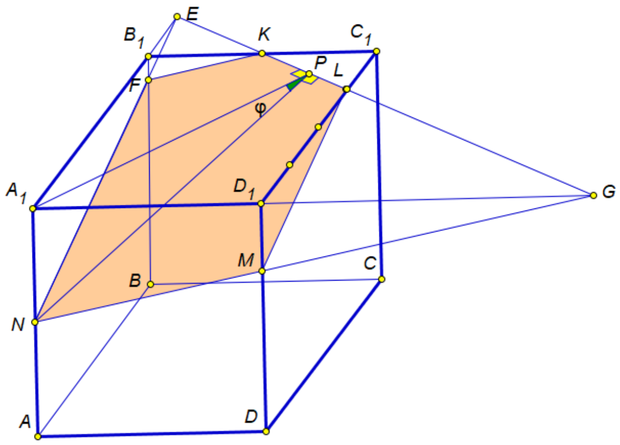
2) Соединяем E и N. F – точка пересечения прямых EN и BB_1.

3) G – точка пересечения прямых KL и A_1D_1.

4) M – точка пересечения прямых GN и DD_1.

5) $FKLMN$ – искомое сечение.

φ - угол наклона плоскости сечения к плоскости $A_1B_1C_1D_1$.



$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{A_1B_1KLD_1}}{\cos\varphi}=\frac{a^2-a^2/16}{\cos\varphi}=\frac{15a^2}{16\cos\varphi}.$$

$$A_1P\cdot KL=2S_{A_1KL}=2(a^2-a^2/4-3a^2/8-a^2/16)=5a^2/8.$$

$$A_1P=5a^2/(8KL)=a\sqrt{5}/2,\ \cos\varphi=A_1P/NP=\frac{5a}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2/4+5a^2/4}}=\frac{5}{\sqrt{30}}.$$

$$S_{сеч}=\frac{3a^2\sqrt{30}}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{3a^2\sqrt{30}}{16}$.

Решение варианта № 8

1. Вычислите коэффициент при x^{80} в многочлене $(1+x+x^2+\cdots+x^{80})^3$ после приведения подобных членов. (12 баллов)

Решение: $(1+x+x^2+\cdots+x^{80})^3=(1+x+x^2+\cdots+x^{80})(1+x+x^2+\cdots+x^{80})(1+x+x^2+\cdots+x^{80})$

Пусть после раскрытия скобок слагаемое $x^p\cdot x^q\cdot x^r$ получается, если множитель x^p выбирается их первой скобки, x^q - из второй скобки, x^r - из третьей скобки. Тогда $x^p\cdot x^q\cdot x^r=x^{80}$, $p+q+r=80$, $0\le p,q,r\le 80$, $p,q,r\in N$. Нужно вычислить количество таких слагаемых при раскрытии скобок. Пусть $p=0$, количество различных сумм $q+r=80$ равно 81. Пусть $p=1$, количество различных сумм $q+r=79$ равно 80. И так далее. Пусть $p=80$, количество различных сумм $q+r=0$ равно 1. Вычислим общее количество таких слагаемых: $1+2+3+\cdots+81=\frac{82\cdot 81}{2}=3321$.

Ответ: 3321.

2. Найдите площадь фигуры, координаты $(x;y)$ точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x+1|-|y+3|\ge 0, \\ \log_4(x^2+y^2+6y+2x-26)\le 3. \end{cases}$$

(12 баллов)

Решение. $\begin{cases} |x+1|-|y+3|\ge 0; \\ \log_4((x+1)^2+(y+3)^2-36)\le 3. \end{cases}$

Замена: u=x+1, v=y+3/

Имеем: $\begin{cases} |u|-|v|\ge 0; \\ 36\ge v^2+u^2\le 100. \end{cases}$

Площадь фигуры равна $S=\frac{\pi(100-36)}{2}=32\pi$.

Ответ: 32π.

3. Какая наименьшая площадь может быть у круга с центром в начале координат, который имеет общие точки с графиком функции $y=\frac{6}{x}-\frac{4x}{3}$? (16 баллов)

Решение. $(x;f(x))$ принадлежит окружности с радиусом r

$$r^2=f^2(x)+x^2=\left(\frac{6}{x}-\frac{4x}{3}\right)^2+x^2=\frac{36}{x^2}+\frac{25x^2}{9}-16\ (r^2)'=-\frac{72}{x^3}+\frac{50x}{9}=\frac{2(25x^4-36\cdot 9)}{16x^3},$$

$$x_{\min}=\sqrt{18/5},\quad S_{\min}=\pi r_{\min}^2=4\pi.$$

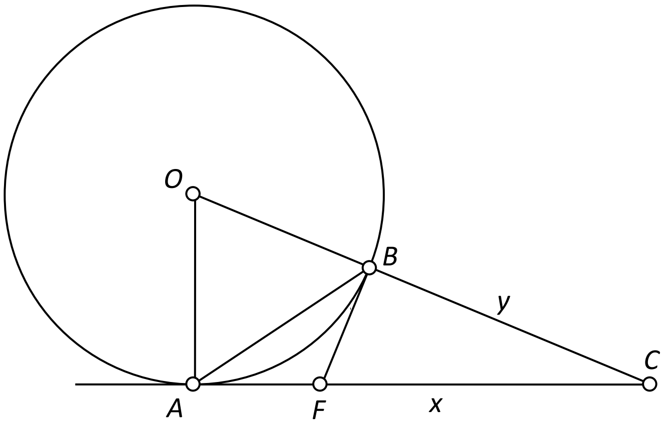
Ответ: 4π .

4. Из точки C проведена касательная к окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центром в точке O, точка A является точкой касания. Отрезок CO пересекает окружность в точке B. Из точки B восстановлен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BF=2$. (20 баллов)

Решение:

Так как BF и AF отрезки касательных, $BF = AF = 2$.

Прямоугольные треугольники AOC и BFC подобны, $\dfrac{OC}{FC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{OA}{BF}$.



Пусть $x = CF, \quad y = BC$.

Тогда $\dfrac{y+2\sqrt{5}}{x} = \dfrac{2+x}{y} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2\sqrt{5} = x\sqrt{5}, \\ 2+x = y\sqrt{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5}y+10 = 5x, \\ 2+x = \sqrt{5}y, \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = \sqrt{5}. \end{cases}$

В треугольнике ABC имеем $AC = 5$, $BC = \sqrt{5}$, $\sin\angle OCA = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3}$, $\cos\angle OCA = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Отсюда по теореме косинусов получаем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos\angle OCA = 25+5-10\cdot 5\cdot\frac{1}{3} = \frac{40}{3}, \quad AB = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $R_{\text{оп}} = \dfrac{AB}{2\sin\angle OCA} = \dfrac{2\sqrt{10}\cdot 3}{2\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{30}/2$.

5. Найдите все значения *x*, при которых неравенство $(a+2)x-(1+2a)\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+a^2+4a-5>0$ выполняется хотя бы для одного $a \in [-2;1]$.

Решение:

$a^2+(x-2\sqrt[3]{x^2}+4)a+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5>0$

Найдем *x*, при которых для всех $a \in [-2;1]$ выполняется неравенство

$a^2+(x-2\sqrt[3]{x^2}+4)a+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5 \le 0.$

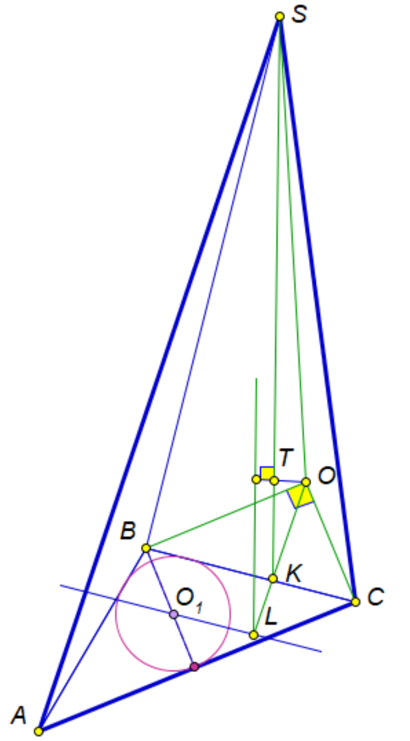
Обозначим $f(a) = a^2+(x-2\sqrt[3]{x^2}+4)a+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5$. Тогда $\begin{cases} f(-2) \le 0, \\ f(1) \le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-9 \le 0, \\ 3x-3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x} \le 0, \end{cases}$

$t = \sqrt[3]{x}, \quad \begin{cases} t^2-2t-3 \le 0, \\ t(t^2 \le -t-2) \le 0, \end{cases} \quad t \in \{-1\} \cup [0;\, 2], \quad x \in \{-1\} \cup [0;8].$

При $x \in (-\infty;\,-1) \cup (-1;\,0) \cup (8;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-1) \cup (-1;\,0) \cup (8;\,+\infty)$

6. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем *AB* = *BC* = 3, *AC* = 5. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, если высота пирамиды равна $7/12$. (20 баллов)



Решение:

$AB = BC = b = 3,\ \ AC = a = 5,\ d = \rho(O_1, BSC)$

$$OB = a/2,\quad OC = \sqrt{b^2 - a^2/4},\ OK = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b}$$

$r = \dfrac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \dfrac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}$, $LK = r$, в треугольнике OSK имеем

$$\frac{OT}{d} = \frac{OK}{LK},\quad d = \frac{OT \cdot 2b}{a + 2b},$$

$$SO = h,\quad h \cdot OK = OT\sqrt{h^2 + OK^2},$$

$$OT = \frac{h \cdot OK}{\sqrt{h^2 + OK^2}} = \frac{ha\sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{16h^2b^2 + a^2(4b^2 - a^2)}},$$

$$d = \frac{2hab\sqrt{4b^2 - a^2}}{(a + 2b)\sqrt{16h^2b^2 + a^2(4b^2 - a^2)}} = \frac{35\sqrt{11}}{396}.$$

Ответ: $\dfrac{35\sqrt{11}}{396}$.