МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найти x и y, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$(x-y)^2+\left(y-2\sqrt{x}+2\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\boldsymbol{x=1,\ y=\frac{1}{2}}$**.**

Решение:

Пусть $u=(\sqrt{x}-1)^2+1=x-2\sqrt{x}+2\geq 1$, $v=y-2\sqrt{x}+2$.

Тогда $y-x=v-u$ и исходное уравнение примет вид

$$(v-u)^2+v^2=\frac{1}{2}.$$

$$v^2-2uv+u^2-\frac{1}{2}=0.$$

Рассматривая последнее уравнение как квадратное относительно v, и учитывая не отрицательность дискриминанта, получим

$$u^2\leq 1.$$

Следовательно, $u=1$, $v=\frac{1}{2}$. Тогда $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

2. Для того, чтобы пройти 2 км. пешком, проехать 3 км. на велосипеде и 20 км − на машине, дяде Ване требуется 1 час 6 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км − на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 5 км. на велосипеде и 80 км − на машине?

Ответ: 2 часа 54 минуты. (2,9 ч.)

Решение:

Пусть $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ − скорости ходьбы, езды на велосипеде и машине соответственно.

Тогда составим систему, согласно условию задачи:

$$\begin{cases}2x+3y+20z=66,\\5x+8y+30z=144.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=66-20z,\\5x+8y=144-30z.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=96-70z,\\y=40z-42.\end{cases}$$

Следовательно, $4x+5y+80z=4(96-70z)+5(40z-42)+80z=174$ мин.

174 мин. = 2 часа 54 мин.

3. Найдите все значения m, при которых любое решение уравнения

$$2019\cdot\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+2018\cdot\log_2(3x-1)+m=2020$$

принадлежит промежутку $[1\,;3]$.

Ответ: $\boldsymbol{m\in[-8072;-2017]}$**.**

Решение:

Рассмотрим $f(x)=2019\cdot\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+2018\cdot\log_2(3x-1)+m-2020$.

На области определения $D_f=\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ функция монотонно возрастает, как сумма монотонно возрастающих функций. Уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение будет принадлежать промежутку $[1\,;3]$ тогда и только тогда,

когда $\begin{cases}f(1)\leq 0,\\f(3)\geq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2019+2018+m-2020\leq 0,\\2019\cdot 2+2018\cdot 3+m-2020\geq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\leq -2017,\\m\geq -8072.\end{cases}$

4. Докажите, что для $a < 1,\ \ b < 1, c < 1\ \ a + b + c \geq \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \frac{125}{216}.$$

Доказательство:

Так как $a < 1,\ \ b < 1, c < 1$, то $1 - a > 0,\ 1 - b > 0,\ 1 - c > 0.$ Используя известное неравенство о средних, получим

$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} = 1 - \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{5}{6}$ при условии, что $a + b + c \geq \frac{1}{2}$.

Следовательно, получили $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{5}{6}$.

Возведем в куб последнее неравенство и получим требуемое неравенство.

Таким образом, неравенство доказано.

5. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, которое является квадратом. Найдите объем пирамиды, если сторона основания равна a, сторона квадрата в сечении равна b.

Ответ: $\boldsymbol{V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2b^2 + 2ab - a^2}}{12(a-b)}}$.

Решение:

Пусть H − длина высоты пирамиды, l − длина бокового ребра. Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

Выразим высоту H через a и b.

Так как $H^2 = l^2 - \frac{a^2}{3}$, $\frac{l}{a} = \frac{b}{a-b}$, то $H^2 = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}(2b^2 + 2ab - a^2)^2$.

Следовательно,

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2b^2 + 2ab - a^2}}{12(a-b)}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(x - 2020)^2 + (x - 2020)^{10} = 2(x - 2020)^{12}.$$

Ответ: $\{\mathbf{2019}; \mathbf{2020}; \mathbf{2021}\}$.

Решение:

Пусть $t = x - 2020$, тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$t^2 + t^{10} = 2t^{12}.$$

Следовательно, $t = 0$ или $t = \pm 1$. Покажем, что других корней нет:

1) если предположить, что $t^2 > 1$, то $t^{10} > t^2$ и $t^{12} > t^2$.

2) если предположить, что $t^2 < 1$, то $t^{10} < t^2$ и $t^{12} < t^2$.

И в 1) и 2) случаях уравнение не станет тождеством.

Если $t = 0$, то $x = 2020$; если $t = \pm 1$, то $x = 2019$ или $x = 2021$.

2. Для того, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 6 км. на велосипеде и 40 км − на машине, дяде Ване требуется 2 час 12 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км − на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 8 км. пешком, проехать 10 км. на велосипеде и 160 км − на машине?

Ответ: 5 часов 48 минут. (5,8 ч.)

Решение:

Пусть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ − скорости ходьбы, езды на велосипеде и машине соответственно.

Тогда составим систему, согласно условию задачи:

$$\begin{cases}4x+6y+40z=132,\\5x+8y+30z=144.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y=66-20z,\\5x+8y=144-30z.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=96-70z,\\y=40z-42.\end{cases}$$

Следовательно, $8x+10y+160z=8(96-70z)+10(40z-42)+160z=348$ мин.

$$348\text{ мин.} = 5\text{часов } 48\text{ мин.}$$

3. Найдите все значения m, при которых любое решение уравнения

$$2018\cdot\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2}+2019\cdot\log_5(4x+1)+m=2020$$

принадлежит промежутку $[1\,;6]$.

Ответ: $\boldsymbol{m\in[-6054;-2017]}$**.**

Решение:

Рассмотрим $f(x)=2018\cdot\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2}+2019\cdot\log_5(4x+1)+m-2020$.

На области определения $D_f=\left(-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, как сумма монотонно возрастающих функций. Уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение будет принадлежать промежутку $[1\,;6]$ тогда и только тогда,

когда $\begin{cases}f(1)\le 0,\\f(6)\ge 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2018+2019+m-2020\le 0,\\2018\cdot 2+2019\cdot 2+m-2020\ge 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m\le -2017,\\m\ge -6054.\end{cases}$

4. Докажите, что для $a<1,\ \ b<1, c<1\ \ a+b+c\ge\frac{1}{3}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{512}{729}.$$

Доказательство:

Так как $a<1,\ b<1, c<1$, то $1-a>0,\ 1-b>0,\ 1-c>0$.

Используя известное неравенство о средних, получим

$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}=1-\frac{a+b+c}{3}\le\frac{8}{9}$ при условии, что $a+b+c\ge\frac{1}{3}$.

Следовательно, получили $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\frac{8}{9}$.

Возведем в куб последнее неравенство и получим требуемое неравенство.

Таким образом, неравенство доказано.

5. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD*, высотой которой является ребро *SA*=25. Точка *P* принадлежит медиане *DM* грани *SCD*, точка *Q* принадлежит диагонали *BD* и прямые *AP* и *SQ* пересекаются. Найдите длину *PQ*, если *BQ* : *QD* = 3 : 2.

Ответ: 10.
Решение:

Так как прямые AP и SQ пересекаются, то точки A, P, S, Q лежат в одной плоскости. Пусть R— точка пересечения SP и AQ. Тогда

$$\frac{RQ}{AQ} = \frac{DQ}{BQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{RQ}{RA} = \frac{2}{5}.$$

Докажем, что $\frac{RM}{RS} = \frac{2}{5}$. Отметим, что $\frac{DQ}{BA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DQ}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CD}{DQ} = \frac{1}{2}$.

Пусть H— точка ребра SC такая, что $RH \parallel DM$. Тога

$$\frac{CH}{HM} = \frac{CR}{RD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MS}{MH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{MH}{SH} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{RM}{RS} = \frac{2}{5}.$$

Из подобия треугольников RPQ и RSA, получаем, что

$$\frac{PQ}{SA} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{PQ}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow PQ = 10.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.