МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019
МАТЕМАТИКА (11 КЛАСС)
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
1 ВАРИАНТ
(ОТВЕТЫ)

1. Вычислите сумму:

$$\sqrt{2018-\sqrt{2019\cdot 2017}}+\sqrt{2016-\sqrt{2017\cdot 2015}}+\cdots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}.$$ **(7 баллов)**

Ответ: $\frac{\sqrt{2019}-1}{\sqrt{2}}$.

Решение: Используя известную формулу $\sqrt{a-\sqrt{(a+1)(a-1)}}=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{2}}$, верную для $a\geq 1$, получим, что каждый из корней представим в виде:

$$\sqrt{2018-\sqrt{2019\cdot 2017}}=\frac{\sqrt{2019}-\sqrt{2017}}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{2016-\sqrt{2017\cdot 2015}}=\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2015}}{\sqrt{2}},$$

$$\cdots$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}.$$

Сложив все эти равенства, имеем

$$\sqrt{2018-\sqrt{2019\cdot 2017}}+\sqrt{2016-\sqrt{2017\cdot 2015}}+\cdots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}=\frac{\sqrt{2019}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}.$$

2. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

$$f(x)=2\cos 2x+2\cos x-2019.$$ **(7 баллов)**

Ответ: 7.

Решение: С помощью формулы $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ преобразуем данную функцию к виду $f(x)=4\cos^2 x+2\cos x-2021$. Значения косинуса целиком заполняют промежуток $[-1;1]$, поэтому множество значений этой функции совпадает с множеством значений квадратичной функции $f(t)=4t^2+2t-2021$ при условии, что $t\in[-1;1]$. Наименьшее и наибольшее значение находим обоснованно любым способом (графически, через производную, выделением полного квадрата), в результате чего, имеем

$f_{\text{наим}}=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-2021{,}25$, $f_{\text{наиб}}f(1)=-2015$. Таким образом, множество значений функции содержит <u>семь</u> целых чисел: $-2021,-2020,-2019,-2018,-2017,-2016,-2015$.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy + 5yz - 6xz = -2z, \\ 2xy + 9yz - 9xz = -12z, \\ yz - 2xz = 6z. \end{cases}$$ **(7 баллов)**

Ответ: $(-2, 2, 1/6)$, $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, где x, y — любые действительные числа.

Решение: Из третьего уравнения системы находим $yz - 2xz - 6z = 0$, откуда $z(y - 2x - 6) = 0$. Следовательно, $z = 0$ либо $y = 2x + 6$.

1) Пусть $z = 0$, тогда и первое, и второе уравнения сводятся к равенству $xy = 0$. Следовательно, $x = 0$ либо $y = 0$. Таким образом, решениями являются всевозможные тройки чисел вида $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, где x, y — любые действительные числа.

2) Пусть $z \neq 0$, $y = 2x + 6$. Вычитая из второго уравнения исходной системы удвоенное первое, получим $3xz - yz = -8z$. Так как $z \neq 0$, то $y = 3x + 8$. Учитывая условие $y = 2x + 6$, $x = -2$, $y = 2$. После чего из первого или второго уравнения исходной системы находим $z = 1/6$.

4. Пусть A — множество всех шестнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняется два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 1. Докажите, что все числа из множества A четные и множество A содержит более чем 10^6 чисел. **(7 баллов)**

Решение: Пусть m – произвольное число из множества A. По условию $m = n^2$, где $n \in N$. Предположим, что a – последняя цифра числа n, тогда $n = 10k + a$, где $k \in N$. Следовательно, $m = n^2 = 100k^2 + 20ak + a^2$. Сумма $100k^2 + 20ak$ оканчивается цифрой 0 и имеет четное число десятков. Для того чтобы в числе m цифрой десятков была 1, обязательно должна быть нечетной цифра десятков числа a^2. Проверяя все значения $0 \leq a \leq 9$, убеждаемся, что это возможно только при $a = 4$ и $a = 6$. Следовательно, число n четное, а значит четным будет также и число $m = n^2$. Таким образом, все числа из множества A четные.

Оценим теперь в каждой сотне последовательно стоящих натуральных чисел количество таких чисел n, для которых $m = n^2$ имеет цифру 1 в разряде десятков. Каждое число n можно записать в виде $n = 50k + b$, где $-25 < b < 25$, $k \in N$. Возводя в квадрат, имеем

$$m = n^2 = 2500k^2 + 100kb + b^2.$$

Сумма $2500k^2 + 100kb$ оканчивается двумя нулями, поэтому цифра в разряде десятков числа m совпадает с соответствующей цифрой слагаемого b^2. Последней цифрой числа b является 4 или 6 (вытекает из предыдущих рассуждений). Тогда условию задачи могут удовлетворять $b = \pm 4, \pm 6, \pm 14, \pm 16, \pm 24$. Рассматривая их квадраты, убеждаемся, что цифра 1 в разряде десятков получается только при $b = \pm 4$. Следовательно, множество A содержит числа вида $m = n^2, n = 50k \pm 4$, где $k \in N$.

В каждой последовательной сотне натуральных чисел есть четыре числа, квадраты которых имеют цифру 1 в разряде десятков, это числа вида

$$100l + 4,\ 100l + 46,\ 100l + 54,\ 100l + 96, \quad \text{где } l = 0,1,2, ...$$

По условию задачи $10^{15} < n^2 < 10^{16}$ или $10^7\sqrt{10} < n < 10^8$.

Отметим, что $10^7\sqrt{10} < 4\cdot 10^7$ и в промежутке между числами $4\cdot 10^7$ и 10^8 существует $\frac{1}{100}(10^8 - 4\cdot 10^7) = 6\cdot 10^5$ последовательных сотен натуральных чисел. В каждой из них можно выбрать четыре числа, квадраты которых принадлежат А. Поэтому количество элементов в множестве А не меньше, чем $4\cdot 6\cdot 10^5 = 24\cdot 10^5$, а это число очевидно больше 10^6, что и требовалось доказать.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и две плоскости α и β. Плоскость α перпендикулярна прямой A_1C_1, а плоскость β параллельна прямой CD_1. Определите наименьший возможный угол между плоскостями α и β. **(7 баллов)**

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Решение: Докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой l и образуют двугранный угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$, точка $M \in \beta$ и $M \notin l$, $MK \perp \alpha$, $ML \perp l$ (рис.7). Следовательно, $\angle MLK = \varphi$, $\sin\varphi = \frac{MK}{ML}$. Пусть S — произвольно выбранная на l точка, то из неравенства $SM \geq ML$ имеем $\sin\angle MSK = \frac{MK}{SM} \leq \frac{MK}{ML} = \sin\varphi$. Следовательно, $\angle MSK \leq \varphi$.

Вернемся к исходной задаче. Проведем плоскости α и β через точку D_1. Пусть ребро куба равно 1 и O — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Прямая A_1C_1 перпендикулярна диагонали B_1D_1 и ребру DD_1 ,поэтому плоскость $BB_1D_1D \perp A_1C_1$, то есть совпадает с α. Плоскость β проходит через прямую CD_1, следовательно, D_1 лежит на ребре двугранного угла, образованного α и β. Так как $AC \parallel A_1C_1$, то $CO \perp \alpha$ (рис.8).

Отметим, $CO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $CD_1 = \sqrt{2}$, $\sin\angle OD_1C = \frac{1}{2}$, то есть $\angle OD_1C = \frac{\pi}{6}$. Как было показано выше, что если φ — двугранный угол между плоскостями α и β, то $\varphi \geq \angle OD_1C$. Следовательно, $\varphi \geq \frac{\pi}{6}$. Покажем, что угол φ может быть равным $\frac{\pi}{6}$. В плоскости BB_1D_1D через точку D_1 проведем прямую $m \perp OD_1$, а затем построим плоскость β через m и прямую CD_1. Тогда m будет ребром получившегося двугранного угла, а $\angle OD_1C$ — его плоским углом. Следовательно, в этом случае угол между плоскостями α и β равен $\frac{\pi}{6}$, то есть наименьший возможный угол между плоскостями α и β равен $\frac{\pi}{6}$.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019
МАТЕМАТИКА (11 КЛАСС)
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
2 ВАРИАНТ
(ОТВЕТЫ)

1. Вычислите сумму:

$$\sqrt{2020-\sqrt{2021\cdot 2019}}+\sqrt{2018-\sqrt{2019\cdot 2017}}+\cdots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}.$$ (**7** баллов)

Ответ: $\frac{\sqrt{2021}-1}{\sqrt{2}}$.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

2. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

$$f(x)=2\cos 2x+2\sin x-2018.$$ **(7 баллов)**

Ответ: 8.

Решение: С помощью формулы $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ преобразуем данную функцию к виду $f(x)=-4\sin^2 x+2\sin x-2016$. Значения косинуса целиком заполняют промежуток $[-1;1]$, поэтому множество значений этой функции совпадает с множеством значений квадратичной функции $f(t)=-4t^2+2t-2016$ при условии, что $t\in[-1;1]$. Наименьшее и наибольшее значение находим обоснованно любым способом (графически, через производную, выделением полного квадрата), в результате чего, имеем

$f_{\text{наиб}}=f\left(\frac{1}{4}\right)=-2015{,}75$, $f_{\text{наим}}f(-1)=-2022$. Таким образом, множество значений функции содержит <u>восемь</u> целых чисел:

$-2022, -2021, -2020, -2019, -2018, -2017, -2016, -2015$.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y,\\ xy+yz=-y,\\ -5xy+4yz+xz=-4y. \end{cases}$$ (**7** баллов)

Ответ: (2 , −1/3, −3), (x, 0, 0), (0, 0, z), где x, z **—** любые действительные числа.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

4. Пусть B — множество всех четырнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняется два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 5. Докажите, что все числа из множества B четные и множество B содержит более чем 10^5 чисел. (**7** баллов)

Решение: аналогичное решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, тем не менее укажем важное отличие: в каждой последовательной сотне существуют четыре числа, квадраты которых имеют цифру 5 в разряде десятков. Это числа вида $100l + 16,\ 100l + 34,\ 100l + 66,\ 100l + 84,$ где $l = 0,1,2, \dots$

5. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ имеют равную длину. Плоскость α перпендикулярна прямой SA, а плоскость β параллельна прямой CD. Определите наименьший возможный угол между плоскостями α и β. **(7 баллов)**

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Решение: аналогичное решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, тем не менее отметим для этой задачи следующее: Треугольник ASC − прямоугольный. Пусть плоскость α проходит через точку S, тогда прямая $SC \in \alpha$. Если провести плоскость β через прямую CD и считать, что все ребра равны 1, то длина перпендикуляра, опущенного из D на α, равна $\frac{1}{2}AS = \frac{1}{2}$. CD − отрезок, соединяющий D и ребро двугранного угла, CD=1. Если φ − двугранный угол между плоскостями α и β, то $\sin\varphi \geq \frac{1}{2}$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Приложение

10 класс. Задача 5.

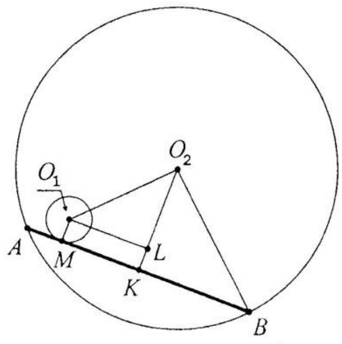

Рис.4

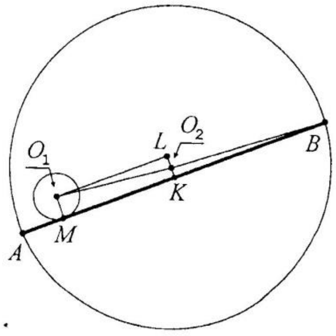

Рис.5

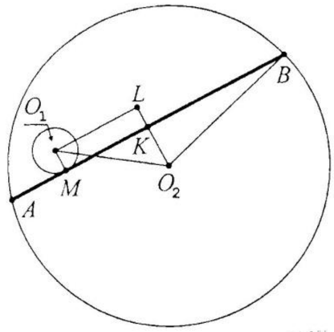

Рис.6

11 класс. Задача 5.

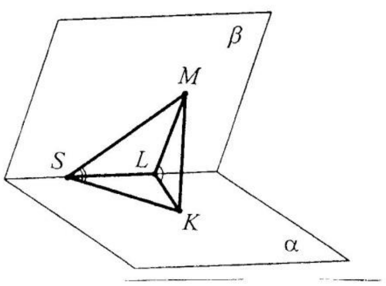

Рис.7

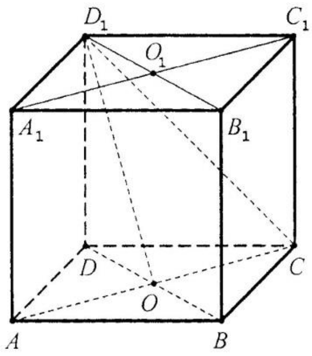

Рис.8