

Министерство образования и науки РФ  
Совет ректоров вузов Томской области  
Открытая региональная межвузовская олимпиада  
2015-2016

МАТЕМАТИКА

11 класс

II этап  
Вариант 1

1. Один маляр может покрасить забор за 1 час, а второй за 45 минут. Начав работу одновременно, они проработали 20 минут, после чего первый прекратил работу. Сколько нужно времени, чтобы один второй маляр закончил работу?

(7 баллов)

Ответ: 10 мин.

2. Решить уравнение  $\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x - 4} = \frac{x - 1}{2}$ .

(8 баллов)

Ответ: 0;1;5.

3. Решить уравнение  $\sqrt{6 \cos 4x + 15 \sin 2x} = 2 \cos 2x$ .

(10 баллов)

Ответ:  $-\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} + \pi n$ .

4. Решить неравенство  $2 + \log_{2x-1} \frac{3}{8x^2 - 6} \leq 0$ .

(10 баллов)

Ответ:  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$

5. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  из вершин  $B$  и  $D$  диагонали  $AC$  проведены перпендикуляры  $BH$  и  $DK$ . Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке  $AC$  и  $AC = 20, AK = 19, AH = 3$ . Найти площадь трапеции  $ABCD$ .

(10 баллов)

Решение. Заметим, что прямоугольные треугольники  $DKA$  и  $BHC$  подобны, так как

$\angle BCH = \angle DAK$ . Пусть  $DK = x, BH = y$ . Ввиду подобия  $\frac{DK}{KA} = \frac{BH}{HC}, \frac{x}{19} = \frac{y}{17}$ . С другой стороны,  $CD$

$= AB$  и по теореме Пифагора

$$CD^2 = DK^2 + KC^2 = x^2 + 1, AB^2 = BH^2 + HA^2 = y^2 + 9.$$

Отсюда  $x^2 - y^2 = 8$ . Так как  $y = \frac{17x}{19}$ , то, подставляя  $y$  в последнее уравнение, получим  $x = 19/3$ ,  $y$

$= 17/3, S_{ABCD} = AC \cdot (DK + BH) / 2 = 20 \cdot (19/3 + 17/3) = 120$ .

Ответ: 120.

**6.** Может ли число  $(x^2 + 3x + 1)^2 + (y^2 + 3y + 1)^2$  при каких-то целых  $x$  и  $y$  оказаться точным квадратом?

(15 баллов)

**Решение.** Так как  $x^2 + 3x + 1 = x(x + 3) + 1$ , то при любых целых  $x$  и  $y$  значение каждого из выражений в скобках — нечетное число. Квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, поскольку  $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$ . Таким образом, значение данного выражения является четным числом и при делении на 4 дает остаток 2.

Пусть оно является точным квадратом, тогда это квадрат четного числа. Но квадрат любого четного числа делится на 4 — противоречие.

Ответ: Нет, не может.

**Внимание!** Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

**Желаем успеха!**

Министерство образования и науки РФ  
Совет ректоров вузов Томской области  
Открытая региональная межвузовская олимпиада  
2015-2016

МАТЕМАТИКА

11 класс

II этап  
Вариант 2

1. Два трактора вместе вспахивают поле за 4 дня. Если первый трактор проработает 3 дня, а затем второй – 5 дней, то будет вспахано 95% этого поля. За сколько дней может вспахать поле один второй трактор?

(7 баллов)

Ответ: 10 дней.

2. Решить уравнение  $\frac{\sqrt{x^2 - 6x - 7}}{x - 7} = \frac{x + 1}{3}$ .

(8 баллов)

Ответ:  $-2; -1; 8$ .

3. Решить уравнение  $\sqrt{-9 \cos 2x - 19 \cos x} = -2\sqrt{3} \sin x$ .

(10 баллов)

Ответ:  $\pi + \arccos \frac{1}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

4. Решить неравенство  $2 + \log_{1-2x} \frac{1}{1-5x^2} \geq 0$ .

(10 баллов)

Ответ:  $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$

5. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AB$  и  $CD$ , длины которых равны 10, из вершин  $B$  и  $D$  к диагонали  $AC$  проведены перпендикуляры  $BH$  и  $DK$ . Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке  $AC$  и  $AH:AK:AC = 5:14:15$ . Найти площадь трапеции  $ABCD$ .

(10 баллов)

Решение. Обозначим  $x = BH$ ,  $y = DK$ . Из подобия прямоугольных треугольников  $DKA$  и  $BHC$ , так как  $\angle BCH = \angle DAK$  получаем

$$\frac{x}{y} = \frac{CH}{AK} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, 5y = 7x, y = \frac{7x}{5}.$$

По условию  $AH:AK:AC = 5:14:15$ , поэтому  $AH:CK = 5:1$ . По теореме Пифагора

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 100 - x^2, CK^2 = CD^2 - DK^2 = 100 - y^2.$$

Следовательно,  $\frac{25}{1} = \frac{AH^2}{CK^2} = \frac{100-x^2}{100-y^2}$ . Так как  $y = \frac{7x}{5}$ , то, подставляя  $y$  в последнее уравнение, на-

ходим, что  $x = \sqrt{50}$ ,  $y = \frac{7\sqrt{50}}{5}$ ,  $AH = \sqrt{50}$ ,  $AC = 3\sqrt{50}$ ,

$$S_{ABCD} = AC \cdot (DK + BH) / 2 = AC \cdot (x + y) / 2 = 180.$$

Ответ: 180.

**6.** Может ли число  $(x^2 + x + 3)^2 + (y^2 + y + 3)^2$  при каких-то целых  $x$  и  $y$  оказаться точным квадратом?

(15 баллов)

**Решение.** Так как  $x^2 + x + 3 = x(x+1) + 3$ , то при любых целых  $x$  и  $y$  значение каждого из выражений в скобках — нечетное число. Квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, поскольку  $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$ . Таким образом, значение данного выражения является четным числом и при делении на 4 дает остаток 2.

Пусть оно является точным квадратом, тогда это квадрат четного числа. Но квадрат любого четного числа делится на 4 — противоречие.

Ответ: Нет, не может.

Ответ:

**Внимание!** Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

**Желаем успеха!**