ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

8-9 класс

****

ЗАДАЧА № 1 (5 баллов)

На 50 литровом баллоне стерлась надпись с названием содержащегося в нем газа. Манометр на баллоне показывает давление 10 атмосфер при температуре 27°С. Известно, что масса газа в баллоне — 342 г. Какой газ может находиться в баллоне?

<u>Решение:</u> Переведем данные из условия задачи в систему СИ:
V=50 л = 50 * 0.001 м^3 = 0.05 м^3;
T=27°С=(273.15+27) K = 300.15 K;
P=10 атм = 10 * 101325 Па = 1013250 Па;
m=325 г = 0.325 кг.
Молярную массу μ неизвестного газа найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\mu = \frac{mRT}{PV},$$

где R — универсальная газовая постоянная, равная 8.31 Дж/(моль * К). Подставляя сюда известные числовые данные, находим

$$\mu = \frac{0.325 \cdot 8.31 \cdot 300.15}{1013250 \cdot 0.05} \approx 0.01683 \text{ кг/ моль}.$$

Таким образом, неизвестный газ имеет молекулярную массу примерно 17 а.е.м. (атомных единиц массы). Поэтому этим газом может быть, например, аммиак NH_3.

<u>Ответ:</u> Например, аммиак NH_3.

<u>Комментарий:</u> Не исключено, что есть и другие газы с молекулярной массой около 17 а.е.м.

ЗАДАЧА № 2 (5 баллов)

Пусть резисторы с величинами $R_1 = 0.25R$, $R_2 = 0.5R$, $R_3 = 2R$ и $R_4 = 4R$, где R — некоторая константа, соединили в одну схему. Какое минимальное электрическое сопротивление может иметь эта схема? Решение обоснуйте.

<u>Решение:</u> Если мы соединяем сопротивления A и B последовательно, то суммарное сопротивление равняется $A+B$; при параллельном соединении этих сопротивлений суммарное сопротивление есть $AB/(A+B)$. Составим отношение

$$\frac{A+B}{AB/(A+B)}=\frac{(A+B)^2}{AB}=\frac{A}{B}+2+\frac{B}{A}>1.$$

Таким образом, параллельное соединение всегда дает общее сопротивление меньше, чем последовательное, т.е. для получения минимального сопротивления, все резисторы нужно соединить параллельно. Общее сопротивление схемы R_s находится из выражения

$$\frac{1}{R_S}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}.$$

Отсюда $R_S=(4/27)R$.

<u>Ответ:</u> $\frac{4}{27}R$.

ЗАДАЧА № 3 (5 баллов)

В поезде, составленном из одинаковых вагонов, есть полностью заполненные вагоны, вагоны с одним свободным местом, с двумя, с тремя и т.д. и, наконец, вагоны без пассажиров. При этом доля вагонов с различными количествами свободных мест одинакова. Среднее число пассажиров в вагонах поезда оказалось равным 28. Сколько вагонов в этом поезде?

<u>Решение:</u> Обозначим долю вагонов с каким-либо количеством свободных мест через k. Если A — число мест в вагоне, то

$$k=\frac{1}{A+1},$$

т.к. в поезде есть вагоны с количеством свободных мест от 0 до A, а доли вагонов с разными количествами свободных мест одинаковы. Пусть среднее число занятых мест (т.е. среднее число пассажиров) в вагонах равно S. Тогда, по определению среднего,

$$S=k(A-0)+k(A-1)+k(A-2)+\ldots+k(A-(A-1)+k(A-A)).$$

Преобразуем это выражение

$$S=kA(A+1)-k\left[1+2+3+\ldots+(A-1)+A\right]=A-\frac{1}{A+1}\left[\frac{A(A+1)}{2}\right]=\frac{A}{2}$$

(в предпоследнем равенстве была использована формула для суммы арифметической прогрессии). По условию $S=28,$ значит,

$$A=56.$$

Соответственно, число вагонов в поезде может быть равно $A+1=57$ в случае, если вагонов с разным количеством свободных мест было по одному. Если вагонов с разным количеством свободных мест было по 2, то всего вагонов в поезде было $57\cdot 2=114,$ и т.д. Таким образом, формальный ответ будет $57n,$ где n — целое число.

<u>Ответ:</u> $57n,$ где n — целое число.

<u>Комментарий:</u> В реальных поездах, однако, возможное количество вагонов ограничено; по-видимому, единственное разумное количество вагонов в поезде при заданных условиях — это 57.

ЗАДАЧА № 4 (5 баллов)

Определите, за какое время в пещере вырастет конусообразный сталагмит из карбоната кальция высотой 1 м и диаметром основания 50 см (плотность карбоната кальция 2.71 г/см3), если с потолка пещеры каждые 2 секунды капает капля насыщенного раствора $CaCO_3$ объемом 0.5 мл. Примите, что весь карбонат из капли переходит на растущий сталагмит. Произведение концентраций ионов Ca^{2+} и CO_3^{2-} в насыщенном растворе $CaCO_3$ составляет $3.8*10^{-9}$.

Примечание: объем конуса равен 1/3 площади основания, умноженной на высоту.

Решение: Находим объем конуса – 65449 см3. Находим массу конуса через плотность – 177367 г. Находим число моль карбоната кальция в сталагмите 1773,8 моль. Дано произведение концентраций ионов кальция и карбоната. Т.к. они равны по стехиометрии, то концентрация карбоната кальция в насыщенном растворе – это квадратный корень из этого произведения $6.17*10^{-5}$ моль/л. Объем капли в 2000 раз меньше. Поэтому в капле содержится $3,08*10^{-8}$ моль. Находим число капель $5,75*10^{10}$. Находим время: число секунд $1,15*10^{11}$ или 3650 лет

ЗАДАЧА № 5 (5 баллов)

В комплекс космической безопасности входит автоматизированная система телескопов для наблюдения за небесными объектами в поясе астероидов. В зоне действия одного из телескопов, отслеживающего ситуацию в своем секторе размером 100x100 условных единиц измерения, ожидается пролет кометы. Телескоп засек координаты x и y, а также их приращения для всех движущихся объектов в своем секторе. Эти данные были переданы в информационно-аналитический центр, где суперкомпьютер рассчитывает возможные траектории астероидов, которые потенциально могут полететь в направлении Земли.

Составьте программу, выделяющую астероиды, траектории которых должен рассчитать суперкомпьютер.

Входные данные по астероидам (в момент времени t=0) считываются из файла, и имеют следующую структуру: первые два числа через запятую — координаты астероида, следующие два числа со знаком «+» или «-» — приращения координат.
Например:
25, 10, +3, -1,

где 25, 10 — это координаты, а значения +3, -1 — это приращения координат x и y соответственно. Для данного примера, в следующий момент времени (т.е. t=1) астероид окажется в точке с координатами (28, 9) т.е. 25+3 и 10-1. Столкновение астероидов и кометы происходит в случае, если у них совпадают координаты или если при переходе от момента времени t=T к моменту времени t=T+1 их траектории пересекутся. Столкновения считать упругими. Координаты объектов после столкновения округляются до целого. Масса кометы равна 100M, а каждого из астероидов — 1M.

В момент времени t=0 комета имеет координаты 0, 50 и приращения координат +10, +0. Необходимо выделить те астероиды, которые столкнутся с кометой за время ее прохождения сектора телескопа.

Примечание: количество астероидов: 10 штук.

Решение:

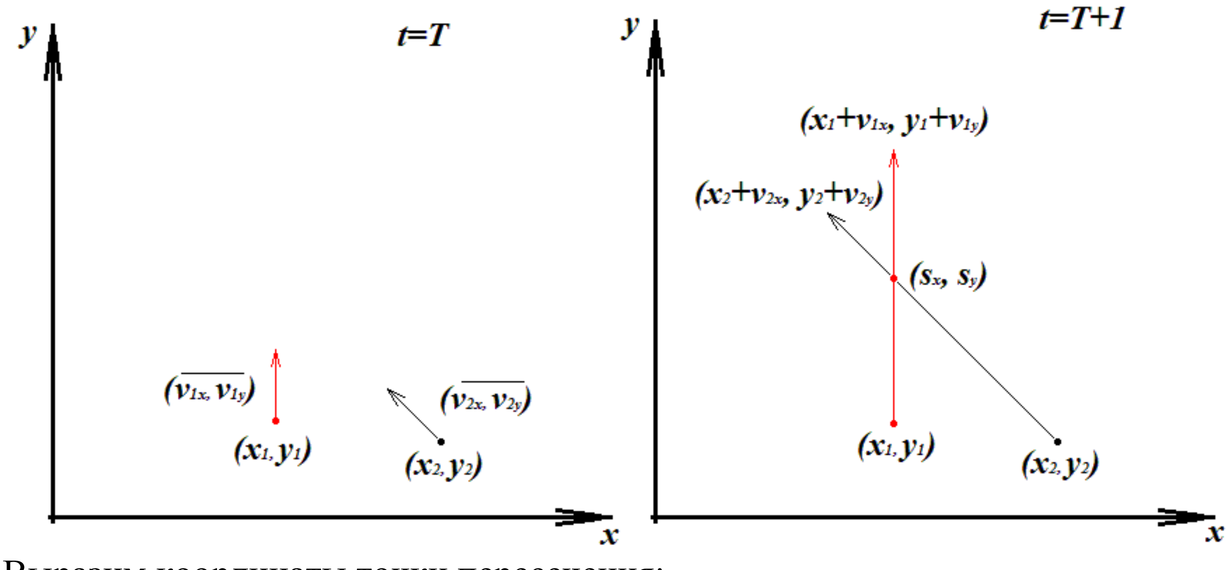
В данной задаче необходимо ответить на несколько вопросов:

1) описать ситуацию, при которой произойдет столкновение объектов;
2) описать процесс столкновения и дальнейший разлет объектов;
3) написать программу, учитывающие первые два условия.

п.1. Условие пересечения траекторий

Предположим что у нас имеются два объекта с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) с соответствующими приращениями скоростей: (v_{1x}, v_{1y}) и (v_{2x}, v_{2y}).

Пусть при переходе от момента времени *t=T* к моменту времени *t=T+1* произошло пересечение траекторий этих объектов (см. рис.) в точке с координатами (s_x, s_y).



Выразим координаты точки пересечения:

1) для вектора с начальными координатами в точке (x_1, y_1):

$$s_x = x_1 + v_{1x} \cdot n,$$
$$s_y = y_1 + v_{1y} \cdot n,$$

2) для вектора с начальными координатами в точке (x_2, y_2):

$$s_x = x_2 + v_{2x} \cdot k,$$
$$s_y = y_2 + v_{2y} \cdot k.$$

Заметим, что в случае когда происходит пересечение траекторий объектов в пределах их перемещения за 1 единицу времени, коэффициенты n и k лежат в пределах от 0 до 1.

В противном случае, если пересечение траекторий не происходит, один из коэффициентов не принадлежит промежутку от 0 до 1.

Пусть (x_1, y_1) это координаты кометы, а (x_2, y_2) это координаты метеоритов которые могут столкнуться с ней.

Приравняем соответствующие координаты и выразим k:

$$x_1 + v_{1x} \cdot n = x_2 + v_{2x} \cdot k,$$
$$\frac{x_1 - x_2 + v_{1x} \cdot n}{v_{2x}} = k,$$

тогда, для $n \in [0,1]$ получаем:

$$\frac{x_1 - x_2}{v_{2x}} \le k \le \frac{x_1 - x_2}{v_{2x}} + \frac{v_{1x}}{v_{2x}}.$$

Или иначе:

$$A \le k_x \le A + \Delta v_x,$$

где: $A = \frac{x_1 - x_2}{v_{2x}}$, $\Delta v_x = \frac{v_{1x}}{v_{2x}}$.

С другой стороны:

$$y_1 + v_{1y} \cdot n = y_2 + v_{2y} \cdot k,$$
$$\frac{y_1 - y_2 + v_{1y} \cdot n}{v_{2y}} = k,$$

тогда, для $n \in [0,1]$ получаем:

$$\frac{y_1 - y_2}{v_{2y}} \le k \le \frac{y_1 - y_2}{v_{2y}} + \frac{v_{1y}}{v_{2y}}.$$

Или иначе:

$$B \le k_y \le B + \Delta v_y,$$

где: $B = \frac{y_1 - y_2}{v_{2y}}$, $\Delta v_y = \frac{v_{1y}}{v_{2y}}$.

В случае пересечения траекторий коэффициент k одинаков в обоих неравенствах (т.е. $k_x = k_y$), однако если пересечение не происходит, данный коэффициент не одинаков в обоих неравенствах т.о. получаем:

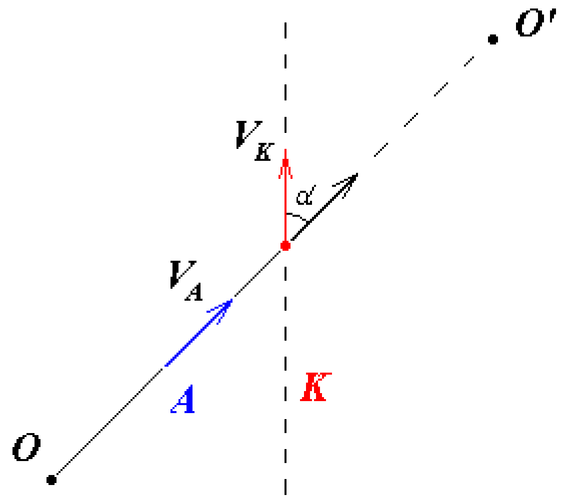
$$A \le k_x \le A + \Delta v_x,$$
$$B \le k_y \le B + \Delta v_y.$$

Данные неравенства позволяют составить достаточно простое условие для проверки вопроса "происходит пересечение траекторий или нет?" Для ответа на этот вопрос необходимо проверить значения правых и левых частей неравенств. Если все 4 числа одновременно лежат в пределах от 0 до 1, то пересечение произошло. Если хотя бы одна из границ выходит за пределы отрезка $[0,1]$, то пересечения нет (на рассматриваемом шаге).

Составим программу для проверки условия пересечения траекторий.

п.2. Столкновение объектов

Рассмотрим ситуацию столкновения кометы (*К*) и астероида (*А*).



Изменение компонент скоростей *К* и *А*, перпендикулярных линии *ОО*' не происходит, меняются только компоненты, перпендикулярные *ОО*'.
Необходимо вспомнить, что при столкновении двух объектов, если масса одного из них много больше массы другого (масса кометы равна 100М, а каждого из астероидов — 1М), то компоненты скорости меняются для меньшего тела.

п.3. Фрагмент программного кода

В теле программы организуем цикл по времени и для каждого шага проверяем происходит или нет столкновение каждого из метеоритов с кометой:
1) если столкновение не происходит то каждый из метеоритов получает соответствующее приращение координат т.е. меняются соответствующие значения в таблице;
2) если столкновение происходит то вычисляем изменение скоростей (их приращение) для метеорита и кометы и заносим их в таблицу.