ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

10-11 класс

****

ЗАДАЧА № 1 (5 баллов)

Хитрый предприниматель придумал способ легкого заработка: он решил покупать золото в Сингапуре (около 1° сев.ш.), а продавать в Хельсинки (около 60° сев. ш.), взвешивая золото на одних и тех же пружинных весах. Сколько процентов прибыли можно получить таким способом, если золото покупать и продавать по одной и той же цене?

<u>Решение:</u> Вес тела на Земле определяется силой тяжести mg, где m — масса этого тела, а g — ускорение свободного падения в месте взвешивания тела. Известно, что величина g неодинакова в разных точках поверхности Земли. То есть в Сингапуре вес некоторого количества золота есть mg_1, а в Хельсинки — mg_2, где g_1 и g_2 — значения ускорения свободного падения в этих городах. Соответственно, прибыль при способе заработка, описанного в условии, равна

$$\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)\cdot 100\%.$$

Основные причины, влияющие на ускорение силы тяжести, — это географическая широта места и его высота над уровнем моря. Поскольку оба города расположены на берегу моря, то высота над уровнем моря у них примерно одинакова, и всё различие в величине g возникает только за счет разной широты этих городов. Известно, что g меняется от 9.780 м/с^2 на экваторе до 9.832 м/с^2 на полюсе (т.е. при изменении широты на 90°). Разница широт Хельсинки и Сингапура равна примерно 60°, что составляет 2/3 от 90°. Соответственно, g в Хельсинки можно найти как

$$g_2 = g_1 + 2\cdot(9.832-9.780)/3 = 9.78+0.03467 \approx 9.815.$$

Отсюда определяем искомый процент прибыли

$$\left(\frac{9.815}{9.780}-1\right)\cdot 100\% \approx 0.36\%.$$

<u>Ответ:</u> 0.36 %.

<u>Комментарий:</u> Существует следующая эмпирическая формула для определения величины g:

$$g = 9.780318\left(1+0.005302\sin^2\varphi-0.000006\sin^2 2\varphi\right)-0.000003086h,$$

где φ — широта рассматриваемого места, h — высота места над уровнем моря в метрах. Подставляя сюда $\varphi = 60°$ и пренебрегая последним слагаемым, получаем для Хельсинки $g \approx 9.819$ м/с^2, при этом искомый процент равен 0.40 %.

ЗАДАЧА № 2 (5 баллов)

В поезде, составленном из одинаковых вагонов, есть полностью заполненные вагоны, вагоны с одним свободным местом, с двумя, с тремя и т.д. и, наконец, вагоны без пассажиров. При этом доля вагонов с различными количествами свободных мест одинакова. Среднее число пассажиров в вагонах поезда оказалось равным 28. Сколько вагонов в этом поезде?

<u>**Решение:**</u> Обозначим долю вагонов с каким-либо количеством свободных мест через k. Если A — число мест в вагоне, то

$$k = \frac{1}{A+1},$$

т.к. в поезде есть вагоны с количеством свободных мест от 0 до A, а доли вагонов с разными количествами свободных мест одинаковы. Пусть среднее число занятых мест (т.е. среднее число пассажиров) в вагонах равно S. Тогда, по определению среднего,

$$S = k(A-0) + k(A-1) + k(A-2) + \ldots + k(A-(A-1) + k(A-A)).$$

Преобразуем это выражение

$$S = kA(A+1) - k\left[1+2+3+\ldots+(A-1)+A\right] = A - \frac{1}{A+1}\left[\frac{A(A+1)}{2}\right] = \frac{A}{2}$$

(в предпоследнем равенстве была использована формула для суммы арифметической прогрессии). По условию $S = 28,$ значит,

$$A = 56.$$

Соответственно, число вагонов в поезде может быть равно $A+1=57$ в случае, если вагонов с разным количеством свободных мест было по одному. Если вагонов с разным количеством свободных мест было по 2, то всего вагонов в поезде было $57 \cdot 2 = 114,$ и т.д. Таким образом, формальный ответ будет $57n,$ где n — целое число.

<u>Ответ:</u> $57n,$ где n — целое число.

<u>Комментарий:</u> В реальных поездах, однако, возможное количество вагонов ограничено; по-видимому, единственное разумное количество вагонов в поезде при заданных условиях — это 57.

ЗАДАЧА № 3 (5 баллов)

Определите, за какое время в пещере вырастет конусообразный сталагмит из карбоната магния высотой 75см и диаметром основания 40 см (плотность карбоната магния 2.85 г/см3), если с потолка пещеры каждые 4 секунды капает капля насыщенного раствора $MgCO_3$ объемом 0.5 мл. Примите, что весь карбонат из капли переходит на растущий сталагмит. Произведение концентраций ионов Mg^{2+} и CO_3^{2-} в насыщенном растворе $MgCO_3$ составляет $1.1*10^{-8}$.

Решение: Находим объем конуса – 31416 см3. Находим массу конуса через плотность – 89535 г. Находим число моль карбоната магния в сталагмите 1065,9 моль. Дано произведение концентраций ионов магния и карбоната. Т.к. они равны по стехиометрии, то концентрация карбоната магния в насыщенном растворе – это квадратный корень из этого произведения 1.05*10-4 моль/л. Объем капли в 2000 раз меньше. Поэтому в капле содержится 5,24*10-8 моль. Находим число капель 2,03*1010. Находим время: число секунд 8,13*1010. 2578 лет

ЗАДАЧА № 4 (5 баллов)

Колориметрия (от лат. color — «цвет» и греч. μετρώ — «измеряю») — физический метод химического анализа, основанный на определении концентрации вещества по поглощению света растворами.

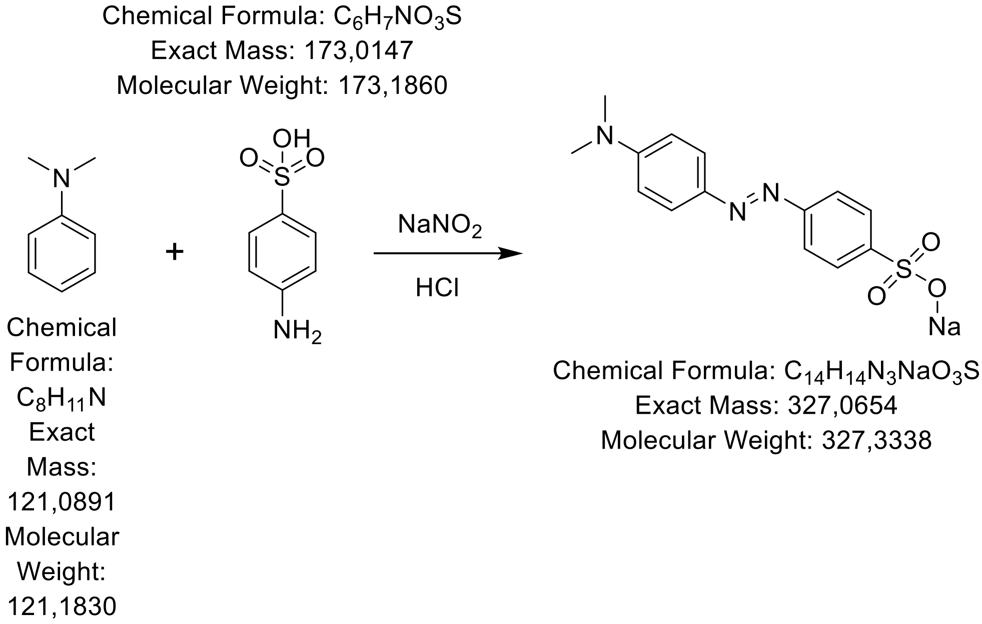
4-(4-Диметиламинофенилазо) бензолсульфонат натрия — известный кислотно-основный индикатор, синтетический органический краситель из группы азокрасителей. Его получают диазотируя сульфаниловую кислоту (*n*-аминобензолсульфокислота), а затем сочетая полученное вещество с диметиланилином.В реакцию были взяты *n*-аминобензолсульфокислота (1.2 г) и диметиланилин (1.9 г). После проведения реакции был получен осадок темно-желтого цвета, содержащий продукт в виде натриевой соли с неизвестным количеством примесей массой 3.24 г. После растворения навески вещества массой 100мг, в 1 литре воды и доведении pH, до значения 2 с помощью концентрированной серной кислоты был проведен колориметрический анализ. Поглощение света на длине волны 505 нм составило 7.46×10^{-5}.

Напишите уравнение вышеуказанной реакции. Используя данные градуировочной зависимости поглощения от концентрации индикатора в водном растворе при pH=2, рассчитайте выход реакции. Какой цвет имеет раствор красителя при pH=2? Будет ли он отличаться от раствора срН=3.9, pH=8, если да, то почему?

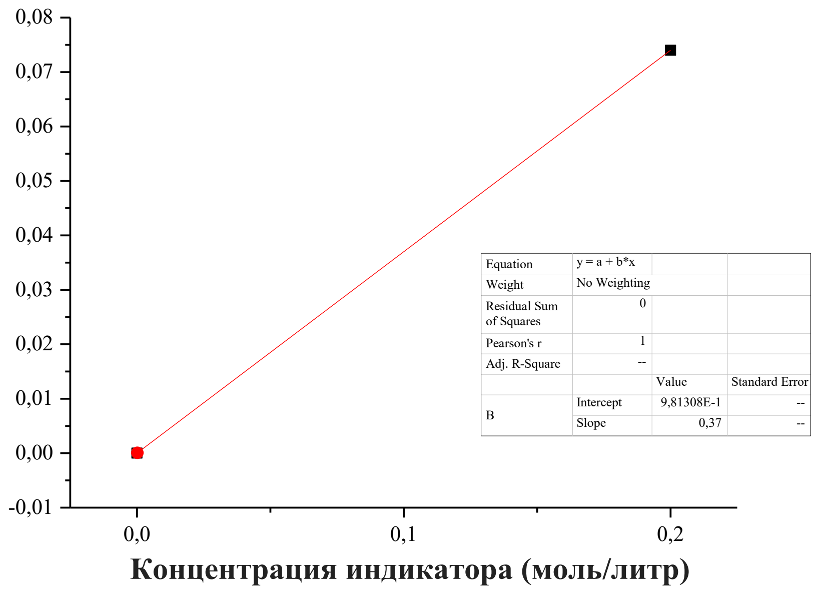
Концентрация индикатора (моль/литр)	**Поглощение (λmax=505 нм)**
0.2	0.0740
0.00005	0.0000185

Решение:

Реакция:



Калибровочная зависимость – уравнение прямой, которое находим по 2 точкам. Дано поглощение в конечном растворе – находим концентрацию индикатора, равную $2.01*10^{-4}$. Т.е. в 1 л $2.01*10^{-4}$ моль или в пересчете на соль, образующуюся в приведенной выше реакции 65.7 мг (молекулярная масса соли 327.3). Поскольку была взята навеска в 100 мг, то значит остальное – примеси. Т.о. выход – 65.7%. Если в реакции образовалось 3.24 г. с примесями, то масса чистого продукта 3.24*0.657 = 2.13 г. Данное вещество больше известно под названием «метиловый оранжевый». При pH=2 (в кислом растворе) этот индикатор будет иметь красный цвет. При pH=3.9 (в середине интервала перехода) цвет будет оранжевым. При pH=8 (в Щелочном растворе) цвет желтый. Цвет отличается из-за различных форм существования данной соли. В кислом растворе катион натрия заменяется на протон, поскольку данная кислота является слабой. В щелочной наоборот, происходит ее диссоциация



ЗАДАЧА № 5 (5 баллов)

В комплекс космической безопасности входит автоматизированная система телескопов для наблюдения за небесными объектами в поясе астероидов. В зоне действия одного из телескопов, отслеживающего ситуацию в своем секторе размером 100x100 условных единиц измерения, ожидается пролет кометы. Телескоп засек координаты x и y, а также их приращения для всех движущихся объектов в своем секторе. Эти данные были переданы в информационно-аналитический центр, где суперкомпьютер рассчитывает возможные траектории астероидов, которые потенциально могут полететь в направлении Земли.

Составьте программу, выделяющую астероиды, траектории которых должен рассчитать суперкомпьютер.

Входные данные по астероидам (в момент времени t=0) считываются из файла, и имеют следующую структуру: первые два числа через запятую — координаты астероида, следующие два числа со знаком «+» или «-» — приращения координат. Например:
25, 10, +3, -1,
где 25, 10 — это координаты, а значения +3, -1 — это приращения координат x и y соответственно. Для данного примера, в следующий момент времени (т.е. t=1) астероид окажется в точке с координатами (28, 9) т.е. 25+3 и 10-1.
Столкновение астероидов и кометы происходит в случае, если у них совпадают координаты или если при переходе от момента времени t=T к моменту времени t=T+1 их траектории пересекутся. Столкновения считать упругими. Координаты объектов после столкновения округляются до целого. Масса кометы равна 10M, а каждого из астероидов — 1M.

В момент времени t=0 комета имеет координаты 0, 50 и приращения координат +10, +0. Необходимо выделить те астероиды, которые к моменту времени t=20 будут иметь координату y меньше 0.

<u>Примечание:</u> количество астероидов: 10 штук.

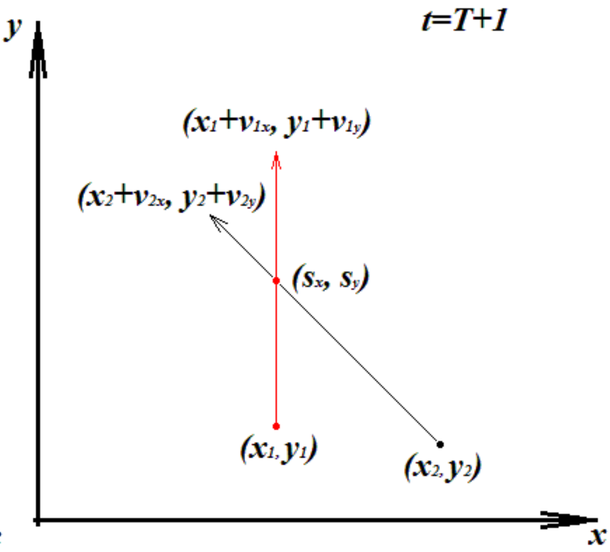
<u>**Решение:**</u>
В данной задаче необходимо ответить на несколько вопросов:

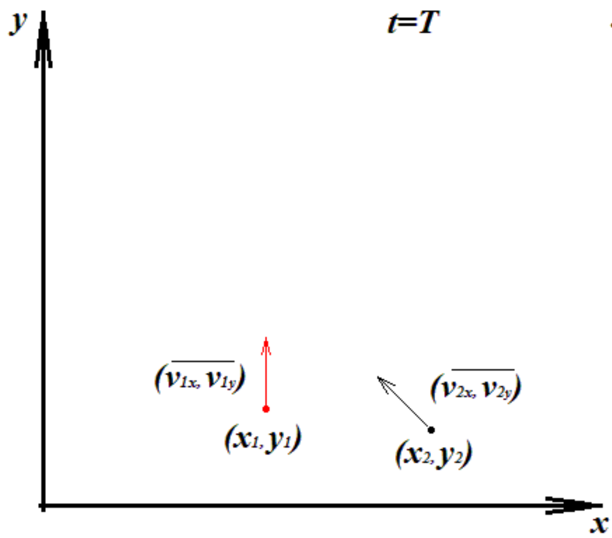
1) описать ситуацию, при которой произойдет столкновение объектов;
2) описать процесс столкновения и дальнейший разлет объектов;
3) написать программу, учитывающие первые два условия.

п.1. Условие пересечения траекторий

Предположим что у нас имеются два объекта с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) с соответствующими приращениями скоростей: (v_{1x}, v_{1y}) и (v_{2x}, v_{2y}).

Пусть при переходе от момента времени *t=T* к моменту времени *t=T+1* произошло пересечение траекторий этих объектов (см. рис.) в точке с координатами (s_x, s_y).





Выразим координаты точки пересечения:

1) для вектора с начальными координатами в точке (x_1, y_1):

$$s_x = x_1 + v_{1x} \cdot n,$$
$$s_y = y_1 + v_{1y} \cdot n,$$

2) для вектора с начальными координатами в точке (x_2, y_2):

$$s_x = x_2 + v_{2x} \cdot k,$$
$$s_y = y_2 + v_{2y} \cdot k.$$

Заметим, что в случае когда происходит пересечение траекторий объектов в пределах их перемещения за 1 единицу времени, коэффициенты n и k лежат в пределах от 0 до 1.

В противном случае, если пересечение траекторий не происходит, один из коэффициентов не принадлежит промежутку от 0 до 1.

Пусть (x_1, y_1) это координаты кометы, а (x_2, y_2) это координаты метеоритов которые могут столкнуться с ней.

Приравняем соответствующие координаты и выразим k:

$$x_1 + v_{1x} \cdot n = x_2 + v_{2x} \cdot k,$$
$$\frac{x_1 - x_2 + v_{1x} \cdot n}{v_{2x}} = k,$$

тогда, для $n \in [0,1]$ получаем:

$$\frac{x_1 - x_2}{v_{2x}} \le k \le \frac{x_1 - x_2}{v_{2x}} + \frac{v_{1x}}{v_{2x}}.$$

Или иначе:

$$A \le k_x \le A + \Delta v_x,$$

где: $A = \dfrac{x_1 - x_2}{v_{2x}}$, $\Delta v_x = \dfrac{v_{1x}}{v_{2x}}$.

С другой стороны:

$$y_1 + v_{1y} \cdot n = y_2 + v_{2y} \cdot k,$$

$$\frac{y_1 - y_2 + v_{1y} \cdot n}{v_{2y}} = k,$$

тогда, для $n \in [0,1]$ получаем:

$$\frac{y_1 - y_2}{v_{2y}} \le k \le \frac{y_1 - y_2}{v_{2y}} + \frac{v_{1y}}{v_{2y}}.$$

Или иначе:

$$B \le k_y \le B + \Delta v_y,$$

где: $B = \dfrac{y_1 - y_2}{v_{2y}}$, $\Delta v_y = \dfrac{v_{1y}}{v_{2y}}$.

В случае пересечения траекторий коэффициент k одинаков в обоих неравенствах (т.е. $k_x = k_y$), однако если пересечение не происходит, данный коэффициент не одинаков в обоих неравенствах т.о. получаем:

$$A \le k_x \le A + \Delta v_x,$$

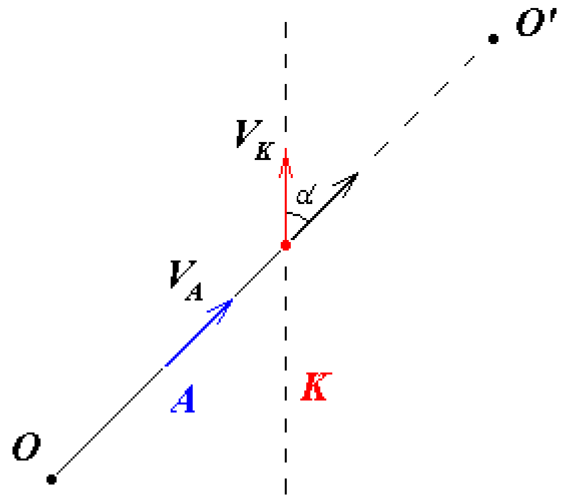
$$B \le k_y \le B + \Delta v_y.$$

Данные неравенства позволяют составить достаточно простое условие для проверки вопроса "происходит пересечение траекторий или нет?" Для ответа на этот вопрос необходимо проверить значения правых и левых частей неравенств. Если все 4 числа одновременно лежат в пределах от 0 до 1, то пересечение произошло. Если хотя бы одна из границ выходит за пределы отрезка $[0,1]$, то пересечения нет (на рассматриваемом шаге).

Составим программу для проверки условия пересечения траекторий.

п.2. Столкновение объектов

Рассмотрим ситуацию столкновения кометы (*K*) и астероида (*A*).



Изменение компонент скоростей *К* и *А*, перпендикулярных линии *OO*' не происходит, меняются только компоненты, перпендикулярные *OO*'.
Косинус угла ($\cos\alpha$) можно определить из соотношения скоростей астероида вдоль осей *x* и *y*.
Формулы для скоростей после столкновения получаются из закона сохранения энергии и закона сохранения импульса:

$$V'_A = -V_A + 2\cdot\frac{m_A V_A + m_K V_K}{m_A + m_K},$$

где V_A - скорость астероида до столкновения, а V'_A - после.

$$V'_K = -V_K + 2\cdot\frac{m_A V_A + m_K V_K}{m_A + m_K},$$

где V_K - проекция скорости кометы на *OO*' до столкновения, а V'_K - после.

Подставим значение массы астероида и кометы ($m_A = 2M$, $m_K = 15M$):

$$V'_A = -V_A + 2\cdot\frac{2MV_A + 15MV_K}{2M + 15M} = -V_A + 2\cdot\frac{2\cdot V_A + 15\cdot V_K}{17} = -V_A + \Delta V,$$

$$V'_K = -V_K + 2\cdot\frac{2MV_A + 15MV_K}{2M + 15M} = -V_K + 2\cdot\frac{2\cdot V_A + 15\cdot V_K}{17} = -V_K + \Delta V,$$

где $\Delta V = 2\cdot\frac{2\cdot V_A + 15\cdot V_K}{17}$.

п.3. Фрагмент программного кода

В теле программы организуем цикл по времени и для каждого шага проверяем происходит или нет столкновение каждого из метеоритов с кометой:
1) если столкновение не происходит то каждый из метеоритов получает соответствующее приращение координат т.е. меняются соответствующие значения в таблице;

2) если столкновение происходит то вычисляем изменение скоростей (их приращение) для метеорита и кометы и заносим их в таблицу.