ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 11112 для 11 класса

1. Выясните, существует ли натуральное число n, для которого найдутся натуральные числа k_1, k_2, k_3, k_4 такие, что

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{k_1}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^{k_2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)^{k_3}\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)^{k_4}=10^n.$$

Если таких чисел n несколько, то найдите показатели k_1, k_2, k_3, k_4 степени для каждого допустимого n.

2. По разным берегам прямолинейного канала в одном и том же направлении равномерно движутся две колонны бронетехники. Длина каждой колонны равна 100 м. Шпион находится на расстоянии 90 м от дальнего берега. Ближняя колонна движется в 4 раза быстрее и загораживает от шпиона часть дальней колонны (то есть дальняя колонна ему видна не целиком или вообще не видна) в течение 5 с. Скорость дальней колонны равна 10 м/с. Найдите расстояние от шпиона до ближнего берега. (Шириной бронетехники можно пренебречь.)

3. Элементы A, B, C, D, E, F, G, H, I, J электрической схемы соединены проводниками AB, AD, AF, BC, CJ, DE, DG, EF, EH, FI, GH, HI. Робот должен обойти все проводники для поиска обрыва и вернуться в начало своего маршрута (один из элементов A, B,. . ., J). При этом некоторые проводники, возможно, придется пройти более одного раза. Найдите наименьшее достаточное для выполнения задачи робота количество пройденных им проводников. Есть ли проводники, которые необходимо проходить более одного раза, сколько их и каково количество повторений, какие это проводники?

4. Функции $T_n(x)$ определены при всех $x\in(-\infty;\infty)$ и целых $n\geq 0$ условиями

$$\begin{cases} T_0(x)=1, \qquad T_1(x)=x, \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), \quad n\geq 1. \end{cases}$$

Решите относительно неизвестного φ уравнение $T_n(\cos\varphi)=1$.

5. При каких целых n число $2n^4+3n^3+n^2$ кратно 6?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 12112 для 11 класса

1. В десятичной записи числа M две цифры оказались пропущены. Они обозначены ниже подчеркиваниями.

$$M = 4 \cdot 13! + 3 \cdot 14! = 286\_42\ 95\_800.$$

Можно ли восстановить эти цифры, не выполнив ни одного умножения? Либо найдите их указанным способом, либо покажите, что это сделать невозможно.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 &= (y-z)^2 - 3, \\ y^2 &= (x-z)^2 - 9, \\ z^2 &= (x-y)^2 + 27. \end{aligned}$$

Для каждого решения (x_k, y_k, z_k) найдите длину отрезка AM_k, где точки A и M_k имеют координаты $(1, 2, 3)$ и (x_k, y_k, z_k).

3. В множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ добавили одно число X, такое что $n+1 \leq X \leq 2n$. Среднее арифметическое этих $(n+1)$ чисел составило $130/11$. Найдите n и X.

4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM являются вершинами некоторого квадрата. Какую часть площади квадрата $ABCD$ занимает этот квадрат?

5. Найдите все пары коэффициентов (p, q) функций $f(x) = 4^x + p2^x + q$, удовлетворяющих условию: если оба коэффициента p, q увеличить на 1 (одновременно), то получится функция, не имеющие действительных корней.

Изобразите все пары коэффициентов на координатной плоскости (p, q).

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 13111 для 11 класса

1. Даны 2018 чисел, определяемых формулой $x_k = \sin\frac{k}{k+2}$. Докажите, что

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018})^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{2018}^2).$$

2. Снежная королева собирается предложить пленнику свободу, если он нарисует такой 1001-угольник, все стороны которого может пересечь одна единственная прямая, не проходящая через его вершины. Каковы шансы пленника? Либо нарисуйте такие 1001-угольник и прямую, либо обоснуйте, что это сделать невозможно.

3. Агрокомбинат "Полярные витамины" имеет 11 теплиц, в которых к новому году выращены ананасы. Известно, что во всех теплицах кроме первой выращено суммарно 100 ананасов, во всех, кроме второй – 110, во всех кроме третьей – 110 ананасов и так далее, во всех теплицах кроме последней (одиннадцатой) выращено 110 ананасов. Сколько ананасов выращено в каждой теплице?

4. Тридцать три тролля строят свои хижины на краю прямолинейного обрыва (оттуда удобнее смотреть за границу на Деда Мороза). Если занумеровать их по порядку, то расстояние между хижинами с номером k и с номером $k + 1$ равно $k^2 - k + 1$ метров. Где троллям следует установить подзорную трубу, чтобы сумма расстояний от каждой хижины до трубы была бы наименьшей?

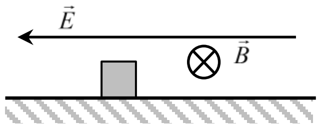
5. Перед праздником все снегурочки собрались на предновогодний инструктаж. Оказалось, что снегурочек с длинной косой, которые не носят очки, меньше, чем снегурочек в очках, но без длинной косы. Каких снегурочек на инструктаже было больше: с длинной косой или в очках?

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 24113
для 11-го класса

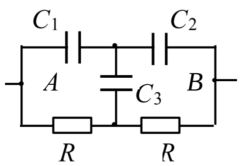
1. Что произойдёт с разностью потенциалов между пластинами плоского воздушного конденсатора, если одну из пластин заземлить? Объясните свой ответ.

2. Изучение нейтронных звезд превратилось в одну из самых увлекательных областей астрофизики. Интерес к ним обусловлен колоссальной плотностью и сильнейшими магнитными и гравитационными свойствами этих объектов Вселенной. Период обращения планеты нейтронной звезды вблизи поверхности T, а скорость движения по орбите V. Рассчитайте массу нейтронной звезды М.

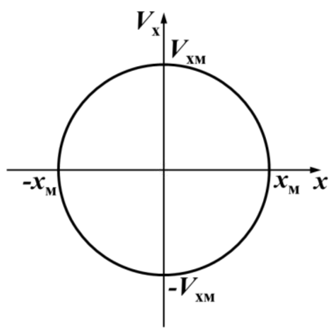
3. Небольшой кубик массой m и положительным зарядом $+q$ скользит по горизонтальному столу в однородных электрическом и магнитном полях (см.рис). Модуль напряжённости электрического поля равен E, модуль магнитной индукции равен B. Найдите коэффициент трения между кубиком и поверхностью стола, если его начальная скорость равна нулю, а максимальная кинетическая энергия, до которой разгоняется кубик, равна W.



4. В электрической схеме (см. рисунок) между точками A и B долгое время поддерживалось постоянное напряжение. Затем, когда напряжение отключили, на резисторах выделилось количество теплоты Q=102 мкДж. Какая энергия была запасена в конденсаторе C_3, если C_2=2C_1, C_3=3C_1.



5. Маленький шарик движется вдоль оси Ox так, что график зависимости проекции его скорости на ось Ox от координаты $V_x(x)$ изображается окружностью (см. рис.). Значения максимальной координаты шарика $x_м$ и максимальной проекции его скорости $V_{xм}$ известны. В момент времени $t_0 = 0$ шарик имеет значения координаты и проекции скорости: $x_0 = –x_м$, $V_{x0} = 0$. Найдите зависимости координаты шарика, проекции его скорости и проекции ускорения от времени. Постройте графики зависимостей $x(t)$, $V_x(t)$, $a_x(t)$. Какие характерные параметры движения шарика вы можете определить?



ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 22111
для 11-го класса

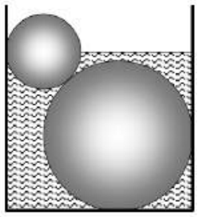
1. Зеркальный шар освещается слева параллельным однородным световым пучком, диаметр которого равен диаметру шара. Ось пучка совпадает с горизонтальным диаметром шара. В каком направлении отразится больше световых лучей: налево или направо? Поясните ответ построением хода лучей.

2. На толстом резиновом жгуте массой m=200г и жёсткостью k=100 Н/м подвешен груз массой M=900 г. Найдите удлинение жгута.

3. Кубик, находившийся в точке A, подтолкнули вверх по гладкой наклонной плоскости. В своём движении он дважды прошёл мимо точки B, находящейся на расстоянии AB=x=0,5 м от точки A: в момент t_1=0,2 с и в момент t_2=1 с (время отсчитывается от момента старта). Какой угол с горизонтом образует наклонная плоскость?

4. Заряженная частица с зарядом Q и массой m движется в однородном магнитном поле с известной магнитной индукцией B так, что её координаты удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} x(t) = a \cdot t \\ \sqrt{z^2 + y^2} = b, \end{cases}$
где a и b – известные величины, заданные с СИ. Найдите скорость частицы.

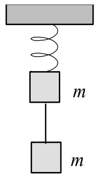
5. Два шара из одинакового материала радиусами r и $2r$ поместили в цилиндрический сосуд диаметром $4{,}5r$ как показано на рисунке. В сосуд наливают жидкость плотностью ρ. Когда жидкость доходит до середины верхнего шара, нижний шар перестает давить на дно. С какой силой в этот момент верхний шар давит на нижний?



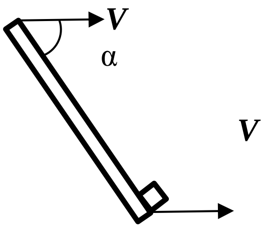
Указание: объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 21111 для 11-го класса

1. Два разноименно заряженных шарика находятся на некотором расстоянии друг от друга. Как изменится электрическая сила, действующая на шарики, если между ними внести металлическую пластинку? Поясните ваш ответ.

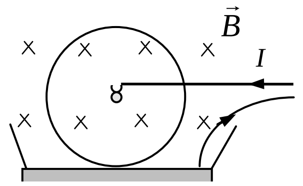


2. Два одинаковых груза массой m подвешены с помощью невесомой пружины жесткостью k и нити. Каким будет максимальное перемещение вверх первого груза после пережигания нити? Нить невесома и нерастяжима.



3. По горизонтальному столу перемещают гладкую доску так, что скорость V любой точки доски равна 100 см/с и направлена под углом α=60^{o} к доске (см. рисунок). Доска толкает впереди себя небольшой кубик массой m=100 г. В начальный момент кубик находится на краю доски. Через какое время кубик оторвётся от доски, если за это время на границе стол-кубик выделяется количество тепла Q=173 мДж? Коэффициент трения μ между кубиком и столом равен 0,2.

4. Медный диск радиусом R может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, касаясь ртути, налитой в металлическую ванну (см. рис.). Диск находится в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B, линии индукции этого поля горизонтальны. К оси диска и к ртути подведены провода от источника тока. Какую минимальную силу F надо приложить к краю диска, чтобы при силе тока I диск оставался неподвижным?

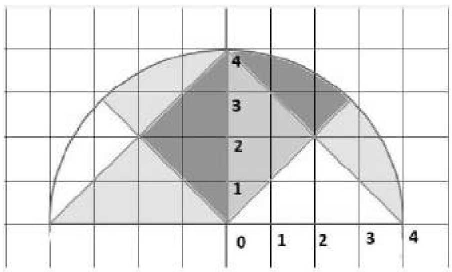


5. На платформе, совершающей гармонические колебания с частотой 5 Гц в вертикальном направлении, лежит груз. При какой минимальной амплитуде колебаний платформы груз оторвется от нее?

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 31112 для 11 класса

Для заданий 1-4 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке

1. Разработать алгоритм для вычисления значения выражения $R = -\sqrt{65 + \sqrt{62 - \sqrt{\ldots - \sqrt{5 + \sqrt{2}}}}}$.
2. Назовём простое число *перестановочным*, если число, составленное из его цифр в обратном порядке – также простое. Разработайте алгоритм для нахождения всех разбиений заданных перестановочных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$ на сумму трёх натуральных чисел x, y и z так, что $n_i = 5x_i + 7y_i + 3z_i$.
3. В прямоугольной таблице размера $m \times n$ записаны целые числа. Подсчитать сумму простых положительных чисел и произведение отрицательных составных (по модулю) чисел.
4. На асфальте мелом нарисована таблица размером $M \times N$ клеток. В клетке либо пусто, либо записано целое число. Ваша задача – переупорядочить (стереть мел и записать новые значения) все числа в порядке убывания. Начинать с угла (1, 1), двигаясь вертикально. Пустые клетки расположить в начале таблицы по строкам.
5. Кощей Бессмертный заточил Василису Премудрую в башню и замуровал окно так, что если пущенная в окно стрела попадёт в заколдованное место, Башня взорвётся, а если найдёт «пробел» в колдовской завесе, то она спадёт и Василиса будет свободна. Василиса тайно передала Ивану Царевичу формулу, по которой «навигатор» стрелы Ивана Царевича может вывести стрелу в точку любого из «пробелов» окна. Запишите эту логическую формулу, которая должна освободить Василису. Примечание: «пробелы» – это не закрашенные области на рисунке.



ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32111 для 11 класса

Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке

1. Дана арифметическая прогрессия, члены которой выписаны в одну строку: 11213141…. Вывести *k-ю* цифру в получившейся строке.
2. Арифметический палиндром - положительное число, которое одинаково считывается слева направо и справа налево. Например, 87578 и 123321 это арифметические палиндромы, а 3753 и 81128 нет. Требуется найти количество способов представить число N как сумму двух арифметических палиндромов. Решения, получаемые перестановкой слагаемых, считать одинаковыми.
3. В квадратной таблице размера $n \times n$ записаны целые числа. В таблице проведена диагональ из угла $(n, 1)$ в угол $(1, n)$. Найти минимум среди сумм модулей элементов диагоналей, параллельных проведённой диагонали таблицы.
4. Для заданного натурального числа N в арифметическом выражении

   $$(\dots(((1 ? 2) ? 3) ? 4) \dots) ? N,$$

   вместо каждого знака ? вставить знак одной из четырёх арифметических операций +, –, *, / так, чтобы результат вычислений равнялся заданному числу Y. При делении дробная часть в частном отбрасывается. Необходимо учитывать приоритет арифметических операций. Достаточно найти одно решение. Вывести последовательность арифметических операций. Если решение найти невозможно, вывести фразу «НЕТ РЕШЕНИЯ».
5. Берег водоема можно представить как прямой угол. Если расположить координатные оси декартовой плоскости по линиям берега, то водоем окажется в I четверти. В водоеме каждая рыба имеет координаты (a, b). Также есть рыбаки, у каждого рыбака есть значение только координаты x (значение координаты y для всех рыбаков равно 0), у каждого рыбака есть удочка с заданной длиной L (для всех рыбаков одинаковое значение). В зафиксированный момент времени рыбак может поймать рыбу на расстоянии меньшем либо равном L. Расстояние между рыбаком и рыбой можно найти по формуле $r = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$. Для каждого рыбака в зафиксированный момент времени определить, сколько рыбы он может поймать. Если рыба доступна сразу нескольким рыбакам, то она ловится первым из них (с наименьшим значением x).