РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 41111 для 11 класса

Обозначим
через H_k высоту подъема на k-ом подскоке (после k-го удара о пол),
через t_k время подъема при k-ом подскоке,
через v_k скорость тела непосредственно после k-го удара о пол.

Везде ниже будем под словом "скорость" подразумевать модуль скорости, с которой движется тело.

1. Все начинается с того, что "пузик" падает с высоты H_0 без начальной скорости. Обозначим через v_0 скорость, которую он приобретет к моменту удара о пол. Из закона сохранения механической энергии

$$m\,g\,H_0 = \frac{m\,v_0^2}{2}$$

находим

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,H_0},$$

Поскольку арбуз движется равноускоренно (с ускорением g), то время первого падения будет равно

$$t_0 = \frac{v_0}{g}.$$

2. Во время удара о пол, согласно условию, скорость уменьшается в k_1 раз, где коэффициент $k_1 = k(v_0) = \dfrac{1}{1 + 0.1\sqrt{v_0}}$. В результате арбуз начинает лететь вверх с начальной скоростью

$$v_1 = k(v_0) \cdot v_0$$

Из закона сохранения механической энергии

$$m\,g\,H_1 = \frac{m\,v_1^2}{2}$$

получаем высоту подъема

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Так как в верхней точке скорость равна нулю, а движение вверх – равнозамедленное, то время подъема

$$t_1 = \frac{v_1}{g}.$$

Столько же занимает спуск, поэтому при подсчете общего времени величину t_1 необходимо будет удвоить.

Поскольку во время полета потерь энергии не происходит, то скорость приземления будет равна скорости взлета v_1.

3. Аналогичным образом можно описать второй подскок "пузика". Затем третий и так далее. Напишем общие формулы для подскока с номером n.

Непосредственно перед ударом о пол арбуз имел скорость v_{n-1}. Во время удара о пол, согласно условию, скорость уменьшается в k_n раз, где коэффициент

$$k_n = k(v_{n-1}) = \frac{1}{1 + 0.1\sqrt{v_{n-1}}}.$$

В результате арбуз начинает лететь вверх с начальной скоростью

$$v_n = k(v_{n-1}) \cdot v_{n-1}.$$

Он достигает высоты

$$H_n = \frac{v_n^2}{2g}$$

и затрачивает на это время

$$t_n = \frac{v_n}{g},$$

а затем еще ровно столько же времени на спуск.

4. Дополнительно при переходе к следующему скачку необходимо учитывать возможность его совершения. Если значение v_n^2 окажется меньше, чем заданная в условии величина W, то движение прекращается. Это условие будет ниже условием прекращения расчетов.

5. Теперь можно сформулировать алгоритм расчета прыжков арбуза

Алгоритм "Полосатые пузики"
Вход: H_0
Начало алгоритма
Положить $v_0 := \sqrt{2\,g\,H_0}$; $t_0 := \dfrac{v_0}{g}$; $T := t_0$; $n := 1$; $W := 0.1$;
ПОКА $v_{n-1}^2 \geq W$
Вычислить новую скорость $v_n = k(v_{n-1}) \cdot v_{n-1}$;
Вычислить высоту $H_n = \dfrac{v_n^2}{2g}$;
Вычислить время $t_n = \dfrac{v_n}{g}$;
Увеличить общее время $T = T + 2\,t_n$;
Увеличить счетчик $n := n + 1$;
КОНЕЦ_ПОКА
Вывести первую и вторую высоты H_1 и H_2;
Вывести время T;
Вывести количество подскоков $n - 1$;
Конец алгоритма

5. Для ответа на третий вопрос нужно сначала с помощью реализованного на компьютере алгоритма получить ответ на второй вопрос. Затем вычислить удвоенное время $T_2 = T \cdot 2$ (где T – время, выданное алгоритмом).

Далее следует запускать тот же алгоритм, подавая в него на вход различные начальные высоты $\widetilde{H}_0$. Например, можно начать с последовательности 5 м, 10 м, 20 м, 40 м и т.д. Ясно, что с большей начальной высотой движение будет продолжаться дольше. Поэтому сначала будут получены времена, меньшие T_2, а затем – превышающие его.

Как только превышение произойдет, будут найдены границы диапазона для искомой начальной высоты. В этом диапазоне ее следует подобрать с точностью 1 м. Это можно сделать различными методами, например, последовательным сокращением диапазона вдвое или простым перебором с шагом 1 м.

6. Если провести расчеты по приведенным алгоритмам, то получим следующий округленный

Ответ:
1. $H_1 = 0.99$ м, $H_2 = 0,67$ м.
2. Все движение займет $T = 7.47$ с и будет состоять из 26 подскоков.
3. Чтобы увеличить время движения вдвое, необходимо увеличить начальную высоту примерно в 9 раз (эта высота больше 13 м, но меньше 14 м).

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 42111 для 11 класса

Вспомним старинный карпатский способ ловли Змея Горыныча: зимой заманить гада в колодец-западню и вызвать лавину, которая наглухо засыпет колодец снегом. Был ли этот способ когда-либо использован, неизвестно. Но известно мнение скептиков, утверждавших, что огнедышащий Змей растопит накрывший его снег и выберется на волю.

Попробуем разобраться в этом процессе.

Будем считать, что над Змеем, сидящим на дне колодца, расположен цилиндрический столб снега, имеющий высоту $H = 10$ м и площадь поперечного сечения $S = 4$ м^2. Плотность снега $\rho = 300$ кг/м^3, удельная теплота плавления $\lambda = 334 \cdot 10^3$ Дж/кг.

Также будем считать, что Змей Горыныч обладает начальным запасом теплорода (создающего выдыхаемое пламя) $M = 40$ кг, удельная теплота сгорания которого $W = 400 \cdot 10^5$ Дж/кг. За один огнедышащий выдох Змей извергает ровно треть оставшегося запаса теплорода. Поскольку, как известно из биологии, Горынычи не теплокровные и, находясь под снегом, могут впасть в спячку, то при каждом огнедышащем выдохе Змею необходимо тратить количество теплоты $E = 10^5$ Дж на собственный обогрев. Все остальное тепло полностью идет на плавление снега, при этом каждый раз снег плавится по всей своей площади, и высота снежного цилиндра уменьшается на некоторую величину.

1. Найдите высоту слоев снега, растопленных при первом и при втором огнедышащих выдохах.

2. Найдите общее количество огнедышащих выдохов, тепло которых пойдет на плавление снега.

3. Определите, сможет ли Змей Горыныч выбраться из западни.

4. Найдите (с точностью до 1 кг), какой минимальный запас теплорода нужен для спасения из западни.

Дополнение

В приведенном выше описании никак не учитывается, что происходит с водой, в которую превращается расплавленный снег. Например, можно считать, что вся вода моментально впитывается в стенки колодца и не участвует в тепловых процессах. Это весьма сильное допущение, но его приходится делать, чтобы упростить модель. Полученные числовые результаты будут грубым, но, тем не менее, адекватным приближением к правильным показателям.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 42111 для 11 класса

Будем считать все выдохи, о которых пойдет речь ниже, огнедышащими.

1. Пусть Змей Горыныч имеет запас теплорода M_1. За первый выдох он истратит $\dfrac{1}{3}M_1$ теплорода, выделив при этом количество теплоты $Q_1 = \dfrac{W\,M_1}{3}$ Согласно условию, из всего выделенного тепла на плавление снега пойдет $Q_1 - E$.

Обозначим массу расплавленного снега через m_1. Тогда $Q_1 - E = \lambda\, m_1$, откуда

$$m_1 = \frac{Q_1 - E}{\lambda}.$$

В соответствии с условием, расплавленная масса снега представляет собой цилиндр с основанием S, высотой D_1 и плотностью снега в нем ρ. Таким образом,

$$m_1 = S\,D_1\,\rho.$$

Поэтому за первый выдох Змей растапливает часть снежного столба высотой

$$D_1 = \frac{m_1}{S\,\rho} = \frac{Q_1 - E}{\lambda\,S\,\rho}.$$

Подставив в эту формулу числа, получим ответ на самый первый вопрос.

Обозначим высоту снежного столба в колодце перед первым выдохом через x_1 (по условию $x_1 = H$). После выдоха она станет равна $x_2 = x_1 - D_1$.

2. После первого выдоха Горыныч будет обладать запасом теплорода

$$M_2 = \frac{2}{3}M_1,$$

поскольку одна треть уже истрачена.

Дальнейшие рассуждения аналогичны пункту 1 (но все величины теперь будут иметь индекс 2). Поэтому за второй выдох растопится вторая часть снежного столба высотой

$$D_2 = \frac{m_2}{S\,\rho} = \frac{Q_2 - E}{\lambda\,S\,\rho},$$

где $Q_2 = \dfrac{W\,M_2}{3}$. Подставив в эту формулу числа, получим вторую часть ответа на первый вопрос.

3. Дальнейшие рассуждения будут циклически повторять описанное выше.

На k–ом шаге цикла будем вычислять высоту очередной растопленной части

$$D_k = \frac{Q_k - E}{\lambda\,S\,\rho}, \quad \text{где} \quad Q_k = \frac{W\,M_k}{3},$$

и затем пересчитывать остаток теплорода M_{k+1} и высоту оставшегося снежного столба $x_{k+1} = x_k - D_k$.

Если величина x_{k+1} получится отрицательной, то это будет означать, что весь снег растоплен и Горыныч свободен.

Если же запас M_{k+1} окажется таким, что $Q_k = \dfrac{WM_{k+1}}{3} \le E$, то тепла для топления снега не останется. Это будет означать, что Горыныч навсегда останется в снежном плену.

4. После всего сказанного можно написать алгоритм вычислений.

Будем использовать переменную-ключ Key для хранения информации о состоянии процесса и о том, чем он завершился.

Если $Key = 0$, то Горыныч бодр и продолжает процесс плавления снега.

Если $Key = 1$, то Горыныч истратил все силы и не может продолжать плавить снег.

Если $Key = 2$, то Горыныч расплавил весь снег и выбирается на волю.

Начало алгоритма

Положить $k := 1$; $Key = 0$; $E := 10^5$; $W = 400 \cdot 10^5$;
$H = 10$; $S = 4$; $\rho = 300$; $\lambda = 334 \cdot 10^3$;
$M_1 = 40$;

ПОКА $Key = 0$;

Вычислить количество теплоты $Q_k = \frac{1}{3} W M_k$;

ЕСЛИ $Q_k < E$ ТО $Key := 1$;

ИНАЧЕ

Вычислить высоту растопленного слоя $D_k = \frac{Q_k - E}{\lambda\, S\, \rho}$;

Вычислить высоту оставшегося снега $x_{k+1} = x_k - D_k$;

Вычислить остаток теплорода $M_{k+1} = \frac{2}{3} M_k$;

Увеличить счетчик $k := k + 1$;

ЕСЛИ $x_k < 0$ ТО $Key := 2$; КОНЕЦ_ЕСЛИ

КОНЕЦ_ЕСЛИ

КОНЕЦ_ПОКА

Сохранить количество выдохов $N = k - 1$;

Вывести D_1 и D_2;

Вывести N;

Вывести Key;

Конец алгоритма

6. Для получения ответа на 4-й вопрос можно действовать подбором. Будем запускать программу при различных значениях M_1 и следить за тем, когда значение ключа Key на выходе станет равным 2. Например, можно сначала запускать программу при $M_1 = 50, 60, 70$ и т.д. Так мы узнаем, что при $M_1 = 100$ спасения нет, а при $M_1 = 100$ есть. Затем в найденном диапазоне можно уточнить начальный запас с точностью до 1 кг.

7. Если провести расчеты по приведенным алгоритмам, то получим следующий округленный

Ответ:

1. $D_1 = 1.33$ м, $D_2 = 0,89$ м.
2. Змей не выберется (растопит лишь 4 м снега) и истратит на плавление снега 22 выдоха.
3. При указанных данных Змей не спасется (растопит лишь ≈ 4 м снега).
4. Минимально необходимое количество теплорода 101 кг.