Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11113 для 11 класса

1. За год цены на энергоносители изменились по закону

$$y(a,x) = ax^3 + 3ax,$$

где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый энергопроизводителем. Могут ли при этом все цены, находившиеся в интервале $(33, 99)$, остаться в нём же?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_2^3 + 1,\ 3x_2 = 2x_3^3 + 1, \\ 3x_3 = 2x_4^3 + 1,\ 3x_4 = 2x_1^3 + 1. \end{cases}$$

3. Боковая грань пирамиды представляет собой треугольник ABC. Две его стороны имеют длины b и $b+2$, медиана к третьей стороне имеет длину $b-1$. Найдите площадь треугольника ABC и выясните, может ли его угол, образованный наиболее длинными сторонами, быть равным $45°$.

4. Целой частью $\lfloor x \rfloor$ числа x называется наибольшее целое число m такое, что $m \le x$, например, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1,\ \lfloor -0.9 \rfloor = -1$. Решите уравнение:

$$\lfloor \sqrt{x/2+3} \rfloor = \sqrt{\lfloor x/2+3 \rfloor}.$$

5. Решите в целых числах следующее уравнение:

$$-20x + 17y = 2017.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12111 для 11 класса

1. В некоторой области для обеспечения электричеством удаленных районов работают гидрогенераторы двух типов, суммарной мощностью 7000 кВт. Если бы все генераторы были первого типа, то суммарная мощность была бы на 1000 кВт больше. Если бы все генераторы были второго типа, то суммарная мощность была бы на 3000 кВт меньше. Какова суммарная мощность генераторов первого типа и какова суммарная мощность генераторов второго типа?

2. Что больше: $\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{2017}\right)$ или $\cos\left(\sin\dfrac{\pi}{2017}\right)$?

3. Сумма квадратов корней функции $f(x) = x^2 + bx + c$ равна 5, а расстояние между корнями равно 3. Найдите минимальное значение m функции $f(x)$ и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 9^{m}, \\ 3^{x-y} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{f(0)}. \end{cases}$$

4. Под куполом цирка n артистов идут с одинаковыми постоянными скоростями по канату. Навстречу им с такими же скоростями движутся еще n канатоходцев. При встрече лицом к лицу любых двух канатоходцев они пожимают друг другу руки, разворачиваются и движутся в противоположные стороны с прежней скоростью. Дойдя до какого-либо конца каната, артист покидает его и спускается. Может ли число всех рукопожатий на канате быть равным $n^3/2 - 1$?

5. Над плоским прямоугольным чемоданом с соотношением сторон $2 : 3$ проезжает прямоугольная рамка интровизора, которая имеет ширину H и достаточно большую длину (можно считать ее бесконечной). Взаимное положение чемодана и рамки таково, что продольная ось рамки всегда остается параллельной диагонали чемодана. При каком расстоянии между осью рамки и параллельной ей диагональю чемодана площадь, покрываемая рамкой, будет максимальна?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13111 для 11 класса

1. Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление $E_1(\rho,t)=\sqrt{t^2-\rho+1}$, $E_2(\rho,t)=\sqrt{3t^2+2\rho-3}$, $E_3(\rho,t)=\sqrt{4t^2+\rho+1}$ зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

2. Число $1/7$ разложили в бесконечную десятичную дробь. В ней 2018-ю цифру после запятой повторили еще раз. Получили число x. Сравните $(1/7)^x$ и $(1/7)^{1/7}$.

3. Вершины усеченной треугольной пирамиды требуется раскрасить так, что концы любого ребра имеют разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколькими способами можно получить такую раскраску с минимальным числом цветов?

4. В две пустые емкости начали в разное время одинаковыми насосами закачивать горючее. В настоящий момент в первой емкости горючего в два раза больше, чем было во второй емкости в момент t_0. В тот же момент t_0 в первой было столько же горючего, сколько во второй в настоящий момент. В обеих емкостях вместе в настоящий момент 49 тонн горючего. Сколько горючего в каждой емкости в настоящий момент и в момент t_0?

Если все горючее в обеих емкостях в настоящий момент перелить в цилиндр, а все горючее в обеих емкостях в момент t_0 перелить в другой цилиндр с тем же основанием, то каково будет отношение уровней горючего в этих цилинрах?

5. Орнаментом в декоративно-прикладном искусстве принято называть повторяющееся изображение одного и того же рисунка. Орнамент на плоской поверхности (на стене, потолке, полу здания или помещения, на ткани, бумаге и пр.) часто образует "замощение" плоскости одинаковыми геометрическими фигурами. Можно ли "замостить" плоскость одинаковыми правильными 5-угольниками так, что любые два соседних 5-угольника имеют ровно одну общую сторону?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 14111 для 11 класса

1. Через точку $O(0;0)$ проведены прямые, касающиеся параболы

$$y = (x-4)(x-9)$$

в точках A и B. Коробка для новогодних подарков имеет вид пирамиды с треугольником AOB в основании и высотой 1. Найдите угол AOB и объем коробки.

2. Решите уравнение

$$3^{x^3}(1-(3^x-\sqrt{3})^{13}) = 3^{x^3} + 3^x - \sqrt{3}.$$

3. Многочлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет корни $f(0)$ и $f(1)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$ и решите неравенство

$$(0,01)^{f(x)} < 10.$$

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что

$$\sin n^\circ = \sin 2017 n^\circ.$$

5. В выпуклом 2017-угольнике $A_1A_2\ldots A_{2017}$ (не обязательно правильном) две стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), … , $A_{2016}A_{2017}$ и A_1A_2 (получили точку B_{2017}), $A_{2017}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге получилась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\ldots B_{2017}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \ldots\ ,\ B_{2017}$ этой "звёздочки".

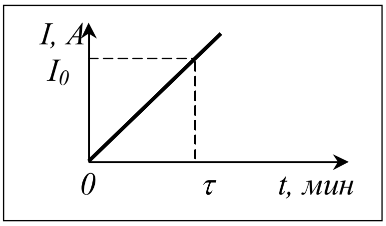
ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 21113 для 11-го класса

1. Нормальное ускорение частицы постоянно по модулю. Нарисуйте траекторию движения частицы, если проекция тангенциального ускорения на направление вектора скорости равна нулю. Объясните рисунок.

2. Маленький тяжёлый шарик, подвешенный на лёгкой нерастяжимой нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Максимальная высота, на которую поднимается шарик (если её отсчитывать от положения равновесия), составляет 1/5 от длины нити. Найдите ускорение шарика в момент его наибольшего отклонения от положения равновесия.

3. Автомат стреляет очередью и создаёт среднюю силу давления на плечо стрелка $F_{ср}$. Масса пули m, скорость пули при вылете из ствола v. Определите число n выстрелов в секунду.

4. На горизонтальном столе лежит прямолинейный проводник массой m и длиной l. Линии однородного магнитного поля направлены вертикально и перпендикулярно проводнику. Ток в проводнике медленно изменяется по закону, приведённому на рисунке. В какой момент времени проводник начнёт двигаться? Коэффициент трения между стержнем и поверхностью стола равен μ, модуль магнитной индукции равен B. Влиянием подводящих проводов пренебречь. Сделайте рисунок, на котором укажите все силы, действующие на проводник.

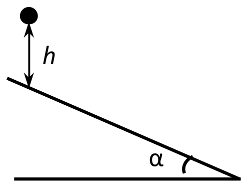


5. Петя и Катя, стоящие на расстоянии S друг от друга, одновременно бросили с одинаковыми начальными скоростями друг другу маленькие мячики и оба их поймали, причём первым свой мячик поймал Петя. Угол, под которым Петя бросил свой мячик, равен α. Найдите минимальное расстояние между мячиками в процессе полёта. Оба мячика бросаются с одной высоты и ловятся на одной высоте; точка броска «своего» мячика совпадает с точкой поимки «чужого»; сопротивлением воздуха пренебрегите.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 22111 для 11-го класса

1. Известно, что подобно фазам Луны существуют фазы Венеры, которые различимы даже невооруженным глазом (в случае острого зрения). При этом кажущийся размер Венеры в разных фазах сильно различается: чем шире серп, тем меньше его диаметр. Объясните этот факт.

2. Паук-серебрянка тащит пузырек воздуха под воду. На глубине 10 см радиус пузырька составил 3 мм. Во сколько раз изменится масса паров воды в этом пузырьке, когда он погрузится на глубину 8 м? Вкладом сил поверхностного натяжения пренебречь, температуру воды считать неизменной.



3. Мячик падает без начальной скорости с высоты h на гладкую безграничную упругую наклонную плоскость, расположенную под углом α к горизонту (см. рис.). Определите, на какое максимальное расстояние удаляется мячик от наклонной плоскости в процессе «прыжков» по ней?

4. Три точечных заряда (модуль каждого равен q) расположены в вакууме в вершинах равнобедренного треугольника, длина основания которого a, а угол при вершине, противолежащей основанию, равен α. Заряды, расположенные в основании треугольника, имеют противоположные знаки. Найдите модуль силы, действующей на третий заряд.

5. Скорости двух разноимённо заряженных частиц, движущихся в однородном магнитном поле с известной магнитной индукцией B, одинаковы и в начальный момент времени перпендикулярны друг другу и перпендикулярны линиям магнитной индукции. Определите, через какой минимальный промежуток времени импульс системы этих двух частиц достигнет максимального значения. Модуль заряда частиц известен и равен Q, массы частиц одинаковы и равны m.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 23112 для 11-го класса

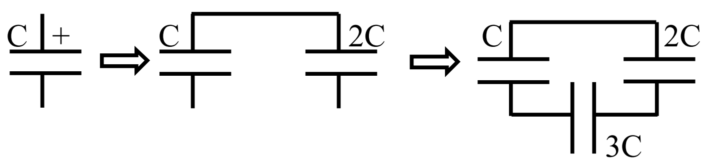
1. Почему работающий трансформатор выходит из строя при замыкании хотя бы одного витка вторичной обмотки? Объясните свой ответ.

2. Маленький тяжёлый шарик массой m, подвешенный на лёгкой нерастяжимой нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Максимальное значение силы натяжения нити в процессе движения шарика равно $T_1 = 1{,}4\,mg$. Определите минимальное значение этой силы.

3. В баллоне вместимостью V = 8,31 л находится m = 15 мг молекулярного водорода. Из-за некоторого воздействия на газ третья часть его молекул диссоциировала на атомы, в результате чего давление в баллоне изменилось на $\Delta p = 1{,}25\,\text{кПа}$. Определите температуру газа, если она оставалась неизменной. Молярная масса молекулярного водорода $M = 2$ г/моль.

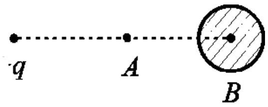
4. Две одноимённо заряженные частицы, импульсы которых равны $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, влетают в область пространства, в которой создано однородное электростатическое поле так, что их импульсы перпендикулярны друг другу. Через некоторое время импульс первой частицы становится равным 0. Определите импульс второй частицы в этот момент времени, если заряды частиц одинаковы. Взаимодействием частиц пренебречь.

5. К заряженному конденсатору с энергией W и ёмкостью C последовательно присоединили незаряженный конденсатор ёмкостью $2C$ (см. рис.). Затем схему замкнули незаряженным конденсатором ёмкостью $3C$. Какой заряд приобрёл конденсатор $3C$?



ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 24113 для 11-го класса

1. Отрицательный электрический заряд q создает электрическое поле, потенциал которого в точке A равен φ_A. Как изменится потенциал поля в этой точке, если в точку B поместить металлический незаряженный шар. Ответ обосновать.

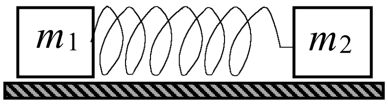


2. Два шара массами m и M летят по одной прямой в одном направлении со скоростями v и V ($v>V$) соответственно. Определите скорость шара массой M после центрального абсолютно упругого удара.

3. Деревянный брусок плавает в жидкости. Плотность бруска в n раз меньше плотности жидкости. Для того, чтобы полностью утопить куб, нужно совершить минимальную работу A. Длины ребер бруска: $a\times a\times b$; причем $b<a$. Определите плотность жидкости. Работа силы сопротивления пренебрежимо мала.

4. Сосуд объёмом $2V$ разделён на две равные части полупроницаемой перегородкой. В первой половине сосуда находится гелий в количестве 2ν моль. Во второй половине находится аргон в количестве ν моль. Известно, что через перегородку могут диффундировать только атомы гелия. Через достаточно большое время во второй части сосуда устанавливается давление $p_2^{/}$. Определите температуру в сосуде, если известно, что она всё время поддерживалась постоянной.

5. На противоположных концах горизонтальной невесомой недеформированной пружины укреплены два различных по массе груза. Пружину растянули, приложив к грузам одинаковые по величине, но противоположные по направлению силы. При этом одно из тел сместилось на расстояние a, а другое – на $b = 4a$. Каким будет период колебаний, если отпустить оба груза одновременно? Коэффициент жесткости пружины k. Тела и пружина находятся на гладком горизонтальном столе. Масса более легкого тела равна m_1.



Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 33112 для 11 класса

Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке.

1. Среди простых чисел, не превосходящих заданного натурального числа n, найти такое, в пятеричной записи которого максимальное количество троек.

2. В теории чисел нечётное натуральное число k называют числом Серпинского, если для любого натурального числа n число $k \times 2^n + 1$ является составным. Тау-число – это целое число, делящееся на число своих делителей. Разработайте алгоритм поиска чисел Серпинского, являющихся тау-числами, для $k = U$ в диапазоне для n от P до Q.

3. Дано множество выпуклых четырёхугольников, заданных координатами вершин. Найти наибольший из тех четырехугольников, обе диагонали которых меньше D.

4. Стойкость криптосистемы RSA основана на вычислительной сложности решения задачи факторизации (разложения на простые сомножители) большого целого числа. Известно, что число 14197777 равно остатку от деления на 56887111 некоторого числа x, возведённого в куб. Числа x и 56887111 имеют общий делитель, отличный от 1. Известно, что число 56887111 является произведением двух простых чисел. Составьте алгоритм для нахождения хотя бы одного такого числа x.

5. Дана квадратная матрица размера $N \times N$, элементы которой – числа в диапазоне от 1 до N. Подсчитать количество строк заданной матрицы, являющихся перестановкой чисел 1, 2, ..., N.

   Пример матрицы приведен на рис.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & \dots & & & a_{16} & \dots & a_{18} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & & & & a_{27} & \\
\dots & & a_{33} & \dots & & \dots & & a_{38} \\
a_{41} & \dots & & a_{44} & \dots & & & \\
 & a_{52} & \dots & & a_{55} & \dots & & \\
 & & a_{63} & & & a_{66} & \dots & \\
\dots & & & a_{74} & & & a_{77} & \\
a_{81} & \dots & & & a_{85} & & & a_{88}
\end{pmatrix}$$

Пример строки:
$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18})$

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32113 для 11 класса

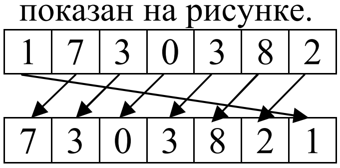
<u>Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке.</u>

1. Найти сумму ряда чисел с точностью ε, $|x| \le 1$

$$\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{4\cdot 8}+\frac{3\cdot 7x^3}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{3\cdot 7\cdot 11x^4}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}+\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15x^5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}+\cdots+\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\cdots\cdot(4n-5)x^n}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot(4n)}$$

2. Даны n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и натуральное число $m>1$. Составить алгоритм для распределения чисел a_1, a_2, ..., a_n так, чтобы сначала шли (по возрастанию абсолютной величины) все числа, дающие при делении на m остаток 0, затем 1, 2, ..., m-1.

3. К массиву цифр натуральных чисел ***a*** (***a[i]*** > 9) применяется операция циклический **сдвиг** влево. Пример применения этой операции к числу 1730382 показан на рисунке.



Из числа 1730382 получено число 7303821. К этому числу опять можно применить сдвиг. К полученному тоже. Получается последовательность чисел 1730382, 7303821, 3038217, 0382173, 3821730, 8217303, 2173038, 1730382, ….

Составьте алгоритм, который для каждого числа из массива ***a*** находит наибольшее число, получаемое из его цифр при сдвиге. Каждое число из массива ***a*** может содержать до 100 цифр.

4. Рассмотрим возрастающий ряд всех положительных несократимых правильных дробей, знаменатель которых меньше или равен n. Разработайте алгоритм нахождения суммы P тех членов данного ряда, для которых знаменатель нацело делится на 21.

5. Числа Пелля задаются соотношением:

$$P_n=\begin{cases}0, n=0\\ 1, n=1\\ 2P_{n-1}+P_{n-2}, n>1\end{cases}$$

. Разработайте алгоритм, находящий простые числа Пелля в диапазоне от P до Q.

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 31112 для 11 класса

Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке.

1. В теории чисел нечётное натуральное число k называют числом Серпинского, если для любого натурального числа n число $k \times 2^n + 1$ является составным. Разработайте алгоритм поиска чисел Серпинского для k=U в диапазоне для n от P до Q.

2. В теории чисел натуральное число называется B-гладким, если все его простые делители не превосходят B. Разработайте алгоритм проверки совершенных чисел в диапазоне от P до Q на B-гладкость. Число называют совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, исключая само число.

3. Разработайте алгоритм, который определяет, является ли заданная матрица H матрицей Адамара (квадратная матрица размера $n \times n$, составленная из чисел 1 и −1, для которой справедливо соотношение $H \times H^T = n * E_n$). Матрица – прямоугольная таблица. E_n – единичная матрица размера n (единичная матрица размера 3 E_3 приведена на рис. 1.). Символ T обозначает операцию транспонирования, т.е. $a_{ij}^T = a_{ji}$. Произведением матриц A размера (MxN) и B размера (NxQ) является матрица C размера (MxN), элементы которой определяются формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} * b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

4. В таблице размером MxN приведены значения величин N измерений силы тока для M амперметров. Найти для каждого прибора максимальное отклонение от среднего значения среди всех приборов.

5. Характеристикой строки целочисленной матрицы назовём сумму её отрицательных нечётных элементов. Переставляя строки матрицы, расположить их в соответствии с неубыванием характеристик. Матрица – прямоугольная таблица.