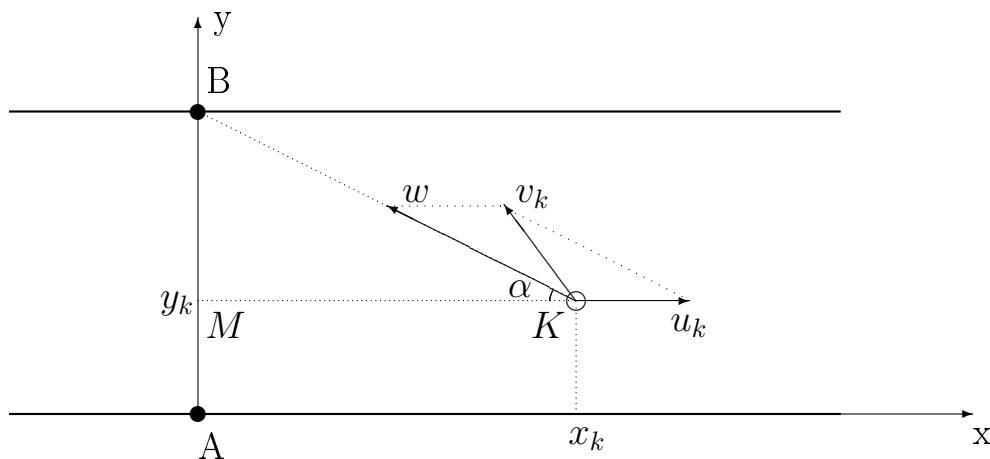


## Решение. 11 класс

1. Введем систему координат, связанную с берегами реки. Пусть ось  $Ox$  направлена по течению (прямолинейной) реки, ось  $Oy$  – перпендикулярно берегу. Начало координат совместим с пунктом отправления  $A$ . Тогда пункт назначения  $B$  будет иметь координаты  $(0, H)$ .

Обозначим скорость реки через  $u$ , скорость лодки (относительно берегов)  $v(t)$ . Согласно условию,  $u = u(y) = 0.02 \cdot y \cdot (H - y)$ . Обозначим угол между направлением на пункт назначения и линией берега через  $\alpha$  (см. рис).

Ясно, что все изменения в процессе движения лодки происходят в момент гребков, которые происходят с интервалом  $\Delta t = 60/10 = 6$  секунд, поэтому достаточно рассматривать только моменты времени  $t_k = k \cdot \Delta t$ . Индексом  $k$  будем помечать величины, относящиеся к моменту времени  $t_k$ .



2. Рассмотрим сначала движение лодки между двумя гребками. Пусть в момент времени  $t_k$  лодка находилась в точке  $K$  с координатами  $(x_k, y_k)$ .

Составляющая вектора перемещения, связанная только со сносом течением, равна  $L_u = (u_k \Delta t, 0)$ .

Составляющая вектора перемещения, связанная только с действиями гребца, равна  $L_w = (-w \cos \alpha \Delta t, w \sin \alpha \Delta t)$ .

Таким образом, координаты точки, в которой лодка окажется в момент следующего гребка, будут равны  $K + L_u + L_w$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + u_k \Delta t - w \cos \alpha \Delta t, \\ y_{k+1} &= y_k + w \sin \alpha \Delta t. \end{aligned}$$

Остается найти угол  $\alpha$ . Это несложно сделать, рассматривая прямоугольный  $\triangle BKM$ . Катет  $MK$  равен координате  $x_k$ , катет  $MB$  равен  $H - y_k$ , откуда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H - y_k}{x_k}$ . Для уменьшения количества расчетных формул можно выразить синус и косинус угла  $\alpha$  и подставить их в формулы.

$$\sin \alpha = \frac{H - y_k}{\sqrt{(H - y_k)^2 + x_k^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_k}{\sqrt{(H - y_k)^2 + x_k^2}}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + u_k \Delta t - \frac{x_k w \Delta t}{\sqrt{(H - y_k)^2 + x_k^2}}, \\y_{k+1} &= y_k + \frac{(H - y_k) w \Delta t}{\sqrt{(H - y_k)^2 + x_k^2}}.\end{aligned}\tag{*}$$

3. Теперь можно сформулировать базовый алгоритм расчета.

### Алгоритм "Базовый"

Задать  $H$ ,  $\Delta t$ ; положить  $x_0 := 0$ ,  $y_0 := 0$ ;

ДЛЯ  $k = 0, 1, 2, \dots$

    Вычислить  $x_{k+1}$ ,  $y_{k+1}$  по формулам (\*);

**конец алгоритма**

Этот основной алгоритм мы будем дополнять действиями, необходимыми для поиска ответов на вопросы задачи.

4. Для ответа на 1-й вопрос нужно найти  $x_{10}$ ,  $y_{10}$ , поскольку за одну минуту происходит 10 взмахов веслами. Для этого достаточно выполнить 10 повторений цикла алгоритма ( $k$  от 0 до 9).

5. Для ответа на 2-й вопрос задачи нужно производить расчет до тех пор, пока  $y_{k+1}$  не окажется больше  $H$ . Это означает, что нужно использовать цикл ПОКА с условием продолжения  $y_k < H$ . Номер последнего шага  $k_H$  будет совпадать с количеством проделанных шагов. Тогда общее время переправы  $T = k_H \cdot \Delta t$ .

Соответствующий алгоритм примет вид

### Алгоритм "Время переправы"

Задать  $H$ ,  $\Delta t$ ; положить  $x_0 := 0$ ,  $y_0 := 0$ ,  $k := 0$ ;

ПОКА  $y_k < H$

    Вычислить скорость течения  $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$ ;

    Вычислить  $x_{k+1}$ ,  $y_{k+1}$  по формулам (\*);

    Увеличить счетчик  $k := k + 1$ ;

КОНЕЦ\_ПОКА

Вычислить общее время  $T := k \cdot \Delta t$ ;

Вывести  $T$ ;

**конец алгоритма**

6. Теперь, когда мы умеем определять номер шага, на котором лодка достигает берега, мы можем определить координату  $x_H$  точки причаливания. Сравнивая ее с координатой т.  $B$  (т.е. с нулем), получаем ответ на 3-й вопрос.

Расстояние от точки причаливания до нужной точки  $B$  равно  $D = x_{k_H}$ . Если  $D \leq \varepsilon$  (см. указания), то можно считать, что лодка причалила напротив места старта. Если же  $D > \varepsilon$ , то сама величина  $D$  будет ответом на дополнительный вопрос о расстоянии.

7. Наконец, для ответа на 4-й вопрос придется искать максимум. Положительное направление оси  $OX$  совпадает с направлением сноса. Ясно, что величина сноса (вдоль реки) в любой момент времени  $t_k$  равна координате  $x_k$ . Поэтому в основной цикл алгоритма нужно добавить поиск максимального значения среди величин  $x_k$ . Будем использовать для этого вспомогательную переменную  $MaxX$ , в ней же будет сохранено искомое максимальное значение.

Алгоритм теперь примет вид (значок % означает комментарий)

### Алгоритм "Время переправы и снос"

Задать  $H, \Delta t$ ; положить  $x_0 := 0, y_0 := 0, k := 0, MaxX := 0$ ;

ПОКА  $y_k < H$

    Вычислить скорость течения  $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$ ;

    Вычислить  $x_{k+1}, y_{k+1}$  по формулам (\*);

    Увеличить счетчик  $k := k + 1$ ;

    ЕСЛИ  $(x_k > MaxX)$  ТО  $MaxX := x_k$ ;

КОНЕЦ\_ПОКА

    % теперь переменная  $k$  содержит количество повторений цикла

Вычислить общее время  $T := k \cdot \Delta t$ ;

Вывести  $T$ ;

ЕСЛИ  $(|x_k| \leq \varepsilon)$  ТО Вывести 'Попали'

ИНАЧЕ Вывести 'Промахнулись на ' +  $x_k$

КОНЕЦ\_ЕСЛИ

Вывести 'Максимальный снос = ' +  $MaxX$ ;

**конец алгоритма**

8. Числовые данные, которые должны были бы быть получены в результате выполнения описанных алгоритмов не приводятся. Их отсутствие следует рассматривать как стимул для повторной самостоятельной проработки задачи.