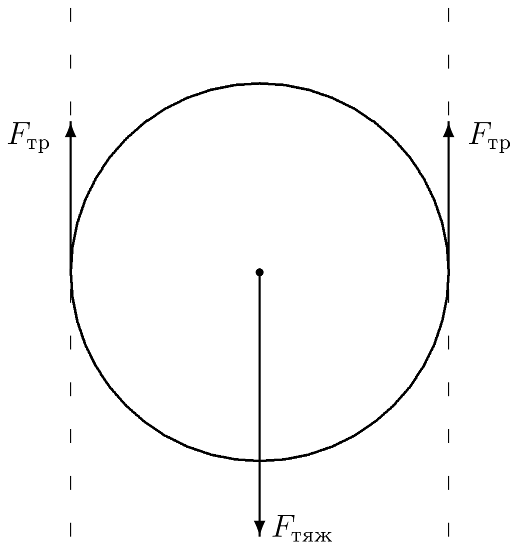
РЕШЕНИЕ вариантов заключительного этапа

1. Будем рассматривать цепочку из M шариков как единое тело.

По вертикали на это тело действует сила тяжести $F_{\text{тяж}} = M\,m\,g$, направленная вниз, и силы трения $F_{\text{тр}}$, приложенные в точках касания шариков с пластинами и направленные вверх. Эти силы изображены на рисунке ниже для одного шарика.



Силы трения с каждой стороны равны и приложены на равных расстояниях, следовательно каждый шарик не вращается, а движется поступательно вниз под действивем разницы между силой тяжести и суммой сил трения. Заметим, что сумма сил трения будет уменьшаться по мере того, как шарики будут выскакивать из канала.

2. Пусть в рассматриваемый момент времени k шариков уже вышло из канала. Тогда равнодействующая (направленнвая вертикально вниз) сила будет равна

$$F_k = M\,m\,g - 2(M-k)F_{\text{тр}}$$

Эта сила будет придавать ускорение

$$a_k = g - \frac{M-k}{M}\,\frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

с которым цепочка будет двигаться вниз. В тот момент, когда вся система сместится вниз на расстояние D, из канала выскочит очередной шарик, и равнодействующая сила изменится.

3. Чтобы ответить на первый вопрос, нужно рассмотреть перемещение цепочки вниз из начального положения на расстояние D, а затем еще на такое же расстояние.

Начальная скорость $v_0 = 0$. Ускорение, получаемое на первом этапе, равно

$$a_1 = g - \frac{M-1}{M}\,\frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

поскольку на первый (самый нижний) шарик уже не действует сила трения. Следовательно, для прохождения пути D потребуется время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2D}{a_1}}.$$

За это время будет приобретена скорость

$$v_1 = a_1 t_1 = \sqrt{2Da}.$$

По прошествии времени t_1 из канала выскочит второй шарик. Теперь цепочка будет иметь ускорение

$$a_2 = g - \frac{M-2}{M}\frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

Время, необходимое для смещения вниз на расстояние D можно найти из квадратного уравнения

$$D = v_1 t + \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Его корни равны $\dfrac{-2v_1 \pm \sqrt{4v_1 + 8a_2 D}}{2a_2}$, и один из них отрицателен. Следовательно, (сокращая на 2)

$$t_2 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1 + 2a_2 D}}{a_2}.$$

За такое время будет приобретена скорость

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = \sqrt{v_1 + 2a_2 D}.$$

4. Заметим, что при поиске величин t_2 и v_2 мы использовали только уже известные значения t_1 и v_1, величины же с индексом $k = 0$ не требовались. Поэтому можно написать формулы для k-го момента через предыдущий:

$$a_k = g - \frac{M-k}{M}\frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

$$t_k = \frac{-v_{k-1} + \sqrt{v_{k-1} + 2a_k D}}{a_k},$$

$$v_k = v_{k-1} + a_k t_k = \sqrt{v_{k-1} + 2a_k D}.$$

5. Теперь можно сформулировать алгоритм расчета момента выскакивания прозвольного шарика.

Алгоритм "Шарик M"
Вход: M % номер последнего вышедшего шарика
Выход: U, T % скорость на выходе и время от начала движения
начало алгоритма
положить $T := 0$; $k := 1$; $v_0 := 0$;
ПОКА $k < M$;
Вычислить ускорение $a_k = g - \dfrac{M-k}{M}\dfrac{2F_{\text{тр}}}{m}$;
Вычислить время $t_k = \dfrac{-v_{k-1} + \sqrt{v_{k-1} + 2a_k D}}{a_k}$;
Увеличить общее время $T = T + t_k$;
Вычислить скорость $v_k = v_{k-1} + a_k t_k = \sqrt{v_{k-1} + 2a_k D}$;
Увеличить счетчик $k := k + 1$;
КОНЕЦ_ПОКА
Сохранить скорость на выходе $U = v_{k-1}$; % т.к. счетчик был увеличен
Вывести U;

Вывести T;
конец алгоритма

6. Для ответов на 2 и 3 вопросы теперь достаточно выполнить описанный алгоритм для $M = 50$.

7 (10, 11 классы).

После того, как последний шарик окажется на свободе, движение цепочки будет определяться только силой тяжести.

Обозначим через U скорость, которую приобретет цепочка к моменту полного выхода из канала. Тогда ее смещение вниз (т.е. свободное падение) на растояние X будет описываться законом

$$X = U\,t + \frac{g\,t^2}{2}.$$

Отсюда можно найти время падения (аналогично тому, как это делалось выше)

$$t_X = \frac{-U + \sqrt{U + 2gX}}{g}$$

и приобретенную скорость

$$V = U + g\,t_X = \sqrt{U + 2gX}. \qquad (*)$$

Поскольку к началу свободного падения нижний шарик находился на расстоянии $M\,D$ от нижнего края пластин, то в полученную формулу следует подставить $X = H - M\,D$.

8 (11 класс).

Остается подобрать значение сил $F_{\text{тр}}$, при котором цепочка выскользнет из канала вдвое быстрее. Обозначим через T_0 время выскаьзывания, найденное в п. 6 (ответ на вопрос 3). Теперь будем запускать алгоритм при $M = 50$ и некотором значении $F_{\text{тр}}$ и получать время движения T. Если $T > T_0/2$, то новый запуск будем делать с меньшим значением $F_{\text{тр}}$, если же $T < T_0/2$, то с большим.

Ответ.

Запуск описанных алгоритмов выдал нам следующие значения.

1 (все классы).

В момент выскальзывания второго шарика скорость $V_2 = 0.02$ м/с,
в момент выскальзывания третьего $V_3 = 0.17$ м/с.

2 (все классы).

В момент выскальзывания последнего шарика скорость составит $V_{50} = 1.29$ м/с.

3 (все классы).

Время выскальзывания всей цепочки $T = 4.19$ с.

4 (10 и 11 классы).

Скорость, с которой нижний шарик ударится о дно $U = 4.57$ м/с.

5 (11 класс).

Сила трения, при которой время выскальзывания уменьшается вдвое, $F = 0.098$ Н.