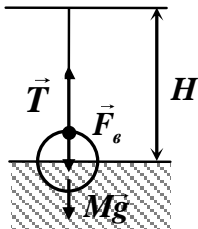


Избранные задачи отборочного тура.

7 класс

Цилиндрическая подводная лодка массой M и радиусом R , горизонтально опустившись на мягкий илистый грунт, погрузилась в него наполовину (ось симметрии цилиндра находится на уровне дна). Глубина водоема равна H , плотность воды ρ , атмосферное давление p_0 . Лодку при помощи троса поднимает плавучий кран. Минимальная сила натяжения троса, необходимая для того, чтобы лодка начала подниматься, оказалась равна T . Определите длину лодки. Вязкостью грунта и трением лодки о грунт пренебречь.

На подводную лодку действует выталкивающая сила, определяемая суммой сил давления на дно лодки и на её верхнюю часть. Учтем, что сила, действующая на дно лодки, направлена вверх: $\vec{F}_{\text{арх}} = \sum \vec{F}_{\text{давл}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{дна}}$; $F_{\text{арх}} = F_{\text{дна}} - F_g$



Давление на дно равно сумме гидростатического давления на глубине H и атмосферного давления:

$F_g = F_{\text{дна}} - F_{\text{арх}} = (\rho g H + P_{\text{атм}}) \cdot S_{\text{дна}} - \rho g V_0$, где V_0 – половина объема лодки, оставшаяся в воде. Площадь дна определяется площадью продольного сечения лодки, проходящего через ее центр:

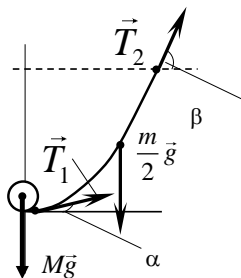
$$F_g = (\rho g H + P_{\text{атм}}) \cdot 2RL - \rho g \frac{\pi R^2}{2} L \quad F_g = 2RL \cdot \left(P_{\text{атм}} + \rho g \left(H - \frac{\pi R}{4} \right) \right)$$

При подъеме лодки на нее действуют сила тяжести, сила натяжения троса и сила, приложенная к верхней части лодки:

$$T = Mg + F_g = Mg + 2RL \cdot \left(P_{\text{атм}} + \rho g \left(H - \frac{\pi R}{4} \right) \right), \quad \text{т.е.} \quad L = \frac{T - Mg}{2R \cdot \left(P_{\text{атм}} + \rho g \left(H - \frac{\pi R}{4} \right) \right)}$$

10 класс

Участок канатной дороги представляет собой трос массой $m = 4$ т, натянутый между двумя опорами, причем точки крепления троса к опорам расположены на одной высоте. Кабинка канатной дороги массой $M = 3$ т перемещается по тросу на маленьком ролике. Определите максимальный угол между касательной к тросу и горизонталью, если в этот момент кабинка находится посередине между опорами, при этом минимальный угол между касательной к свободному участку троса и горизонталью равен $1,5^\circ$. Сделайте подробный рисунок и укажите, в каких точках троса угол между касательной к свободному участку троса и горизонталью достигает максимального и минимального значений.



На кабинку действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и две силы натяжения \vec{T}_1 со стороны каната, направленные по касательной к канату в точках, в которых канат соприкасается с роликом. Условие нахождения кабинки в середине каната позволяет записать равенство суммы вертикальных проекций сил натяжения и силы тяжести кабинки: $2T_1 \sin \alpha = Mg$. Здесь угол α - минимальный угол между касательной к свободному участку троса и горизонталью.

На всю систему в целом (кабинка и канат) действуют сила тяжести $(M+m)\vec{g}$ и две силы \vec{T}_2 со стороны опор, направленные по касательной к канату в точках, в которых канат соприкасается с опорами. Аналогичное уравнение: $2T_2 \sin \beta = (M+m)g$. Здесь угол β - максимальный угол между касательной к свободному участку троса и горизонталью.

Уравнение для горизонтальных проекций сил, действующих на половинку троса:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta, \text{ откуда } T_1 = T_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Тогда $2T_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \sin \alpha = Mg$ и $2T_2 \sin \beta = (M+m)g$. Поделив уравнения друг на

друга, получаем $\frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} \beta} = \frac{M}{M+m}$. Поскольку углы малы, то $\text{tg} \alpha \approx \alpha$, $\text{tg} \beta \approx \beta$. Окончательно:

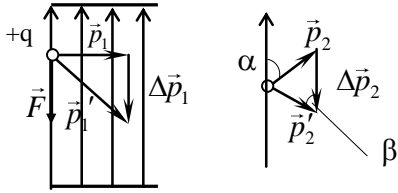
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{M}{M+m}.$$

Минимальный угол между касательной к тросу и с горизонталью – в точках, в которых трос отходит от ролика; максимальный угол между касательной к тросу и горизонталью – в точках, в которых трос соприкасается с опорами.

$$\text{Ответ: } \beta = \alpha \frac{M+m}{M} = 1,5 \frac{3+4}{3} = 3,5^\circ$$

11 класс.

В плоский заряженный воздушный конденсатор влетают два электрона (модули импульсов частиц одинаковы). Через некоторое время модуль импульса первой частицы, которая влетела в конденсатор перпендикулярно напряженности электрического поля конденсатора, увеличился в $\sqrt{2}$ раз, а модуль импульса второй частицы остался прежним. Определите, под каким углом к напряженности электрического поля конденсатора влетела в поле вторая частица. Взаимодействием частиц пренебречь.



Решение. Изменение импульса каждой из частиц равно импульсу силы: $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t = q \vec{E} \Delta t$.

Так как модули зарядов, массы и время движения частиц в электрическом поле конденсатора одинаковы, то одинаков и модуль изменения

импульса.

Тогда т.к. для первой частицы: $\vec{p}^2 + \Delta \vec{p}^2 = \vec{p}'^2 = (\sqrt{2}p)^2$
 $\Delta p = p$.

Тогда для второй частицы по теореме косинусов получим:

$$\vec{p}^2 = \vec{p}^2 + \Delta \vec{p}^2 - 2p \cdot \Delta p \cdot \cos \beta \quad p^2 = p^2 + p^2 - 2p \cdot p \cdot \cos \beta \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \beta = 60^\circ \quad \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Ответ: 60° .

7 класс.

На улице в поселке рядом с каждым домом установлен почтовый ящик. Расстояние между соседними ящиками 20 м. Почтальон развозит письма и газеты на скутере, останавливаясь у каждого ящика. От первого дома ко второму он движется со скоростью $v = 15$ м/с, от второго к третьему со скоростью $\frac{1}{2}v$ м/с, от третьего к четвертому со скоростью $\frac{1}{3}v$ м/с, и так далее. Средняя скорость движения почтальона от 1-го до последнего дома равна 1 м/с. Определите путь почтальона от первого до последнего ящика на этой улице.

Решение:

При количестве домов N пройденный путь составит $L = (N - 1)l$

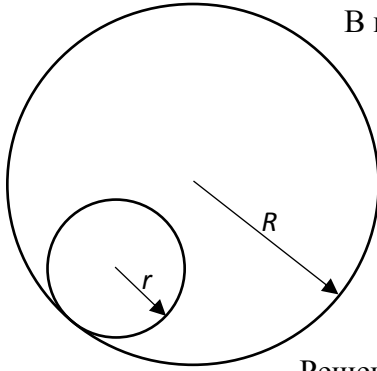
Сумма N членов арифметической прогрессии: $S_N = \frac{N}{2}(a_1 + a_N)$; поэтому

$$S_{N-1} = \frac{N-1}{2}(1 + N - 1) = \frac{N-1}{2}N$$

$$v_{cp} = \frac{L}{\frac{L}{(N-1)v} + \frac{2L}{(N-1)v} + \dots + \frac{L}{v}} = \frac{(N-1)v}{1+2+\dots+(N-1)} = \frac{(N-1)v}{(N-1)\frac{N}{2}} = \frac{2v}{N}$$

$$N = \frac{2v}{v_{cp}} = \frac{2 \cdot 15}{1} = 30 \text{ домов.} \quad \text{Путь } L = (N - 1)l = (30 - 1) \cdot 20 = 580 \text{ м.}$$

9 класс



В пластине, лежащей на столе, имеется круглое отверстие радиуса $R=6$ см (смотри рисунок). Внутри отверстия находится диск радиусом $r=2$ см, который катят без проскальзывания по периметру отверстия так, что диск движется вокруг центра отверстия с угловой скоростью $\Omega=1$ рад/с. Найдите угловую скорость ω вращения диска относительно его центра.

Решение

Центр диска движется по окружности радиусом $R-r$ равномерно с линейной скоростью ωr . За время t центр диска пройдет путь $\omega r t$. С другой стороны,

$$\omega r t = \Omega t (R - r)$$

$$\omega = \Omega \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = 1 \cdot \left(\frac{6}{2} - 1 \right) = 2 \text{ рад/с}$$

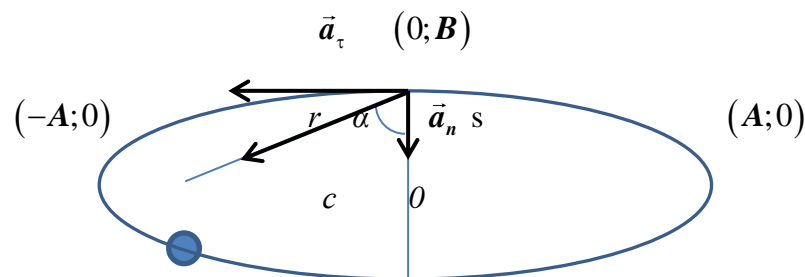
9 класс

Спутник движется по орбите вокруг планеты массой M так, что в некоторой инерциальной системе отсчёта его координаты удовлетворяют уравнению:

$$\left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{y}{B} \right)^2 = 1$$

где все величины заданы в СИ. Планета расположена в точке с координатой $(-C; 0)$. Определите нормальное ускорение спутника \vec{a}_n в точках пересечения траектории спутника с осью OX .

Решение



Значение полного ускорения спутника \mathbf{a} найдем из второго закона Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{сп}} = \mathbf{G} \frac{mM}{r^2}, \text{ где } r \text{ определяется положением спутника на орбите.}$$

В точках пересечения траектории с осью OY параметр s равен B . Функции угла α легко найти как:

$$\sin \alpha = \frac{c}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{s}{r}.$$

$$\text{Тогда } \mathbf{a}_\tau = \mathbf{G} \frac{M}{r^2} \cdot \sin \alpha, \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{G} \frac{M}{r^2} \cdot \cos \alpha.$$

В точках пересечения траектории с осью OX полное и нормальное ускорение совпадают, а тангенциальное обращается в ноль.

Тогда в точках пересечения траектории спутника с осью OX \vec{a}_n равно:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{G} \frac{M}{r^2} \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{В точке } (-A;0) \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{G} \frac{M}{(A-C)^2}, \text{ в точке } (A;0) \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{G} \frac{M}{(A+C)^2}.$$

9 класс

В далекой-далекой галактике находится планетная система, очень похожая на Солнечную: в ней тоже 8 планет, причем вода обнаружена на третьей планете, которая имеет ту же среднюю плотность, что и Земля. Звезда этой системы имеет ту же среднюю плотность, что и Солнце. Все размеры в этой системе (радиус звезды, радиусы планет, радиусы планетных орбит) превышают соответствующие размеры в Солнечной системе в одно и то же число раз. Радиус земной орбиты $R_1 = 150$ млн. км, а земной год длится $T_1 = 365$ суток. Сколько земных суток длится год на аналоге планеты Земля, если радиус ее орбиты $R_2 = 1,05$ млрд. км? Орбиты планет в обеих системах считайте круговыми. Указание: объем шара определяется выражением $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r – радиус шара.

$$m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R = \mathbf{G} \frac{mM_{\text{звезды}}}{R^2}, \text{ отсюда}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\text{орбиты}}^3}{GM_{\text{звезды}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\text{орбиты}}^3}{G \frac{4}{3} \pi r_{\text{звезды}}^3 \rho_{\text{звезды}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{n^3 R_1^3}{G \frac{4}{3} \pi n^3 r_{\text{Солнца}}^3 \rho_{\text{Солнца}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_1^3}{GM_{\text{Солнца}}}} = T_1$$

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_{орбиты}^3}{GM_{звезды}}} = T_1 = 365$ суток

11 класс

Материальная точка движется по плоскости так, что в некоторой инерциальной системе отсчета ее координаты определяются уравнениями:

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right); \quad y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

где все величины заданы в СИ. Определите радиусы кривизны траектории в точках пересечения ее с осями координат.

Решение

Поскольку $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, то тело движется по эллипсу.

Радиус кривизны траектории найдем из формулы для нормального ускорения: $a_n = \frac{V^2}{R}$,

откуда $R = \frac{V^2}{a_n}$.

Проекция скоростей: $V_x = -2\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ и $V_y = 4\frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$.

Проекция ускорений: $a_x = -2\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ и $a_y = 4\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$.

Тогда радиус кривизны траектории при пересечении её с осью Ox определим как

$$R_x = \frac{V_y^2}{a_x} = 8 \text{ м.}$$

Радиус кривизны траектории при пересечении её с осью Oy определим как

$$R_y = \frac{V_x^2}{a_y} = 1 \text{ м.}$$

10 класс.

Тележка массой M и длиной l неподвижно стоит на горизонтальных рельсах. Коэффициент трения тележки о рельсы равен μ . На противоположных концах тележки неподвижно стоят два человека массами m_1 и m_2 . Люди начинают ускоренно двигаться навстречу друг другу, в результате чего тележка движется с ускорением a . Считая, что модули ускорений людей относительно тележки равны, найдите модуль ускорения первого человека относительно земли.

Решение.

Пусть тележка движется в сторону движения первого человека. Очевидно, что на каждого человека действует, кроме силы тяжести $m\vec{g}$ и нормальной реакции тележки \vec{Q} , еще и сила трения \vec{F} со стороны тележки, направленная в сторону движения человека. Тогда

$$\begin{cases} F_1 = m_1 a_1 \\ F_2 = m_2 a_2 \\ -F_1 + F_2 - \mu N = Ma \end{cases} .$$

Учитывая, что $N = Mg + m_1 g + m_2 g$, получаем

$$Ma + m_1 a_1 - m_2 a_2 = -\mu(M + m_1 + m_2)g . \quad (*)$$

Обозначим ускорения людей относительно тележки как \vec{a}'_1 и \vec{a}'_2 . Поскольку $\vec{a}'_1 = -\vec{a}'_2$; $\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}'_1$; $\vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{a}'_2$, то $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = -(\vec{a}'_2 - \vec{a}'_1)$. Тогда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 2\vec{a}$. Это выражение в скалярном виде:

$$a_1 - a_2 = 2a . \quad (**)$$

Совместное решение (*) и (**) дает

$$a_1 = \frac{a(2m_2 + M) + \mu(M + m_1 + m_2)g}{m_2 - m_1} ,$$

$$a_2 = \frac{a(2m_1 + M) + \mu(M + m_1 + m_2)g}{m_2 - m_1} .$$

Наше предположение о движении тележки в сторону движения первого человека будет справедливо, если $m_2 > m_1$.

В ответе школьника может быть получено любое из этих ускорений, т.к. он мог предположить любое соотношение масс.

8 класс

Четыре однородных стержня скреплены за концы друг с другом так, что образуют квадрат с длиной стороны 42 см. Масса получившейся фигуры равна 3,2 кг. Квадрат расположен горизонтально и уравновешен относительно горизонтальной оси, параллельной двум его сторонам. Один из стержней удаляют так, что равновесие оставшейся фигуры нарушается. Какой вращающий момент силы тяжести будет действовать в этом случае на П-образную фигуру и где будет располагаться её центр тяжести? Сделайте рисунок с необходимыми пояснениями.

Решение.

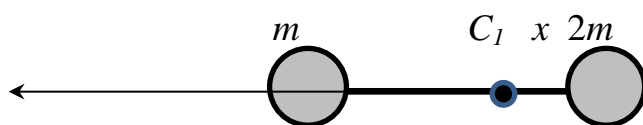
После того, как один из стержней убрали, получилась П-образная фигура .

Введем для удобства следующие обозначения:

m -масса каждого стержня, l -длина стержня,

x -расстояния от центра масс квадрата до центра масс C_1 П-образной фигуры.

Её можно заменить на эквивалентную гантель с массами m и $2m$ (этот груз располагается в центре бывшего квадрата) (см. рис.). Расстояние между массами равно $l/2$.



Смещение центра масс C_1 рассчитаем как:

$$x = \frac{m \cdot \frac{l}{2}}{3m} = \frac{l}{6} = 7 \text{ см.}$$

Вращающий момент $M = 3mg \cdot \frac{l}{6} = \frac{mgl}{2} = \frac{0,8 \cdot 10 \cdot 0,42}{2} = 1,68 \text{ Н} \cdot \text{м.}$

10 класс.

К батарееке присоединили первую лампочку сопротивлением $R_1=3$ Ом. Затем, отсоединив первую лампочку, к батарееке присоединили вторую лампочку сопротивлением $R_2=12$ Ом. В обоих случаях мощность, выделяющаяся на лампочках, оказалась одинаковой. Найдите КПД батарееки при присоединении первой лампочки.

Решение

$$\frac{E^2 R_1}{(r + R_1)^2} = \frac{E^2 R_2}{(r + R_2)^2}$$

$$\sqrt{R_1}(r + R_2) = \sqrt{R_2}(r + R_1)$$

$$r = \sqrt{R_1 R_2}$$

$$\eta_1 = \frac{E^2 R_1 (r + R_1)}{(r + R_1)^2 E^2} = \frac{R_1}{\sqrt{R_1 R_2} + R_1} = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 12} + 3} = \frac{1}{3} = 33 \%$$

10 класс.

Металлический шар заряжен положительным зарядом с поверхностной плотностью σ . Шар окружен концентрической металлической тонкостенной сферической оболочкой, имеющей вдвое больший радиус и такой же по величине электрический заряд. Оболочку заземляют. Определите поверхностную плотность заряда на оболочке после заземления.

Поверхностная плотность заряда шара $\sigma_1 = Q/S$, т.к. заряд равномерно распределяется по поверхности шара. Когда оболочку заземляют, то потенциал оболочки становится равен нулю. Под влиянием поля положительно заряженного шара электроны с поверхности земли переходят на поверхность оболочки и заряд оболочки станет отрицательным.

Очевидно, что потенциал оболочки определяется как

$$\varphi_{об} = 0 = \frac{Q_{ш}}{4\pi\epsilon_0 R_{об}} + \frac{Q'_{об}}{4\pi\epsilon_0 R_{об}}.$$

То есть для заряда оболочки получим:

$$Q'_{об} = -Q_{ш}.$$

Заряд распределяется по внешней поверхности оболочки, и так как $R_{об} = 2R_{ш}$, то

$$\sigma_2 = \frac{Q_{об}}{S_{об}} = -\frac{\sigma}{4}.$$

8 класс.

Одноклассники Петя и Катя, проводящие летние каникулы на даче, очень любят ходить на речку. Любимое место Пети расположено ниже по течению, чем любимое место Кати. Петя решил вплавь добраться до места Кати. Потом ребята, уже вместе, поплыли на место Пети. Какое расстояние проплыл Петя, если на путь к Кате он затратил на 2 мин больше, чем на обратный? Известно, что скорость течения $u=0,5$ м/с, и что Петя и Катя плавают одинаково (т.е. с одной и той же скоростью относительно воды) со скоростью $v=1,5$ м/с.

Решение

$2S$ – путь Пети

$$\Delta t = t_{\uparrow} - t_{\downarrow} = S \left(\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v+u} \right) = \frac{2Su}{v^2 - u^2}$$

$$2S = \frac{\Delta t(v^2 - u^2)}{u} = 480 \text{ м.}$$

10 класс.

К батареек подсоединена лампочка. При горении лампочки внутри батареек выделяется мощность $P_2=0,3$ Вт, а КПД батареек составляет $\eta=75\%$. Найдите мощность P_0 , которая будет выделяться при коротком замыкании этой же батареек.

Решение

P_1 — мощность, выделяющаяся на лампочке,

P_2 — мощность, выделяющаяся на батареек при включённой лампочке,

P - полная мощность при включённой лампочке,

$$P_1/P_2=R/r=\eta/(1-\eta).$$

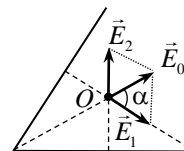
$$P = \frac{P_1}{\eta} = \frac{P_2}{1-\eta} = \frac{E^2}{r+R} = \frac{E^2}{r} \cdot \frac{1}{1+\frac{R}{r}} = P_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{\eta}{1-\eta}} = P_0(1-\eta)$$

$$P_0 = \frac{P_2}{(1-\eta)^2} = 0,3 \cdot 16 = 4,8 \text{ Вт}$$

11 класс

Три одинаковых однородных стержня заряжены с одинаковыми линейными плотностями зарядов и образуют в вакууме правильный треугольник. Потенциал электростатического поля в центре масс этого треугольника равен ϕ_0 . После того, как один из стержней был убран, напряженность электростатического поля в той же точке стала равна E_0 . Определите напряженность и потенциал электростатического поля в этой же точке после того, как будет убран еще один стержень. Перераспределением зарядов стержней пренебречь.

Решение



Вектор напряженности поля, созданного равномерно заряженным стержнем в точке, лежащей на перпендикуляре к его середине, очевидно, направлен вдоль этого перпендикуляра. Это следует из соображений симметрии. и показано на рис. Следовательно, векторы \vec{E}_1 , \vec{E}_2 и \vec{E}_3 созданные в точке O (она находится в центре тяжести однородного правильного треугольника) стержнями, равны по модулю и образуют углы $\alpha=120^\circ$. Потенциалы ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 , созданные в точке O стержнями, равны. Принцип суперпозиции определяет результирующие характеристики и очевидно, что $E=0$, $3\phi_{cm} = \phi_0$ То есть потенциал поля каждого стержня равен $\phi_0/3$.

После удаления одного стержня напряженность и потенциал в точке O определяются формулами $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Тогда $E = E_1 = E_2 = E_0$, а $\varphi = 2\varphi_{cm} = \frac{2\varphi_0}{3}$. Следовательно, если останется один стержень, то $E = E_0$, а $\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{3}$. Следует учесть, что после убирания третьего стержня вектор напряженности в центре треугольника повернется на угол 60° и останется прежним по модулю.

Ответ: $E = E_0$, $\varphi = \frac{\varphi_0}{3}$.