Вариант 27091 – Решение

9.1. Совсем скоро наступит весна, и замёрзшие зимой реки начнут освобождаться от льда – на реках наступит ледоход. Если с берега вы будете наблюдать ледоход на прямом участке достаточно широкой реки, то обнаружите удивительное явление: отколовшиеся друг от друга большие льдины плывут по течению и медленно вращаются на поверхности воды, хотя не сталкиваются друг с другом. Как вы объясните этот эффект?

Решение.

Известно, что скорость течения реки по её ширине неодинакова: у берега вода практически неподвижна, а на середине реки течение самое быстрое. Большая льдина располагается на поверхности воды так, что разные части льдины погружены в слои воды, обладающие разными скоростями. Действие сил трения воды о льдину будет приводить к закручиванию льдины. При этом наблюдается любопытный эффект: льдины, расположенные по разные стороны от середины реки, закручиваются в разных направлениях.

9.2. Однажды ранним утром друзья Петя, Катя и Вася пришли на станцию метро, имевшую три одинаковых эскалатора. Первый эскалатор работал на подъём, второй – на спуск, а третий стоял. Ребята спустились на платформу бегом, каждый по своему эскалатору: Петя – по первому, Катя – по второму, Вася – по третьему. Спускаясь, ребята считали пройденные ступеньки. Петя насчитал N_1=80 ступенек, а Катя – N_2=48. Сколько ступенек насчитал Вася, если скорости бега Пети и Кати (относительно их эскалаторов) относились как 5:3?

Решение

x – ширина одной ступеньки, k=5/3, N – ступеньки, насчитанные Васей

$$\begin{cases} S = Nx = (kv - u)t_1 = (kv - u)\cdot\dfrac{N_1 x}{kv} \\ S = Nx = (v + u)t_1 = (v + u)\cdot\dfrac{N_2 x}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = (kv - u)\cdot\dfrac{N_1}{kv} \\ N = (v + u)\cdot\dfrac{N_2}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 u = kv(N_1 - N) \\ N_2 u = v(N - N_2) \end{cases} \quad\rightarrow\quad \frac{N_1}{N_2} = k\cdot\frac{N_1 - N}{N - N_2}$$

$$N_1 N - N_1 N_2 = kN_1 N_2 - kNN_2 \quad\rightarrow\quad N(N_1 + kN_2) = (k+1)N_1 N_2$$

$$N = \frac{(k+1)N_1 N_2}{N_1 + kN_2} = \frac{8}{3}\cdot\frac{80\cdot 48}{80+80} = \frac{8\cdot 48}{3\cdot 2} = 4\cdot 16 = 64$$

Ответ: $N = \frac{8}{3}\cdot\frac{N_1 N_2}{N_1 + \frac{5}{3}\cdot N_2} = 64$ ступеньки

9.3. Петя пришёл из школы и решил приготовить себе на обед пельмени. На упаковке он прочитал, что для этого надо сначала вскипятить воду. Он налил в кастрюлю некоторое количество холодной воды при температуре t_0 = 20°С, но когда она через время T = 12 мин закипела, то пришла из школы его старшая сестра Лена, и сказала, что тоже хочет пельменей. Кипящей воды в кастрюле оказалось недостаточно для двух порций. Лена быстро долила в кипящую воду некоторое количество холодной воды при той же температуре t_0. Через время τ = 4 мин вода в кастрюле опять закипела, и ребята приготовили себе пельмени. Определите минимальную температуру воды θ в кастрюле после добавления холодной воды в кипяток. Скорость поступления тепла к воде в кастрюле и скорость утечки тепла из кастрюли считайте постоянными.

Решение

P – поступающая мощность (с учётом потерь), C_1, C_2 – теплоёмкости 1-й и 2-й порций воды.

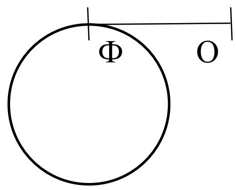
$$\begin{cases} PT = C_1(t_к - t_0) \\ C_1(t_к - \theta) = C_2(\theta - t_0) \\ P\tau = (C_1 + C_2)(t_к - \theta) \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{T} = \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)\frac{(t_к - \theta)}{(t_к - t_0)} = \left(1 + \frac{t_к - \theta}{\theta - t_0}\right)\frac{(t_к - \theta)}{(t_к - t_0)} = \frac{t_к - t_0}{\theta - t_0} \cdot \frac{t_к - \theta}{t_к - t_0} = \frac{t_к - \theta}{\theta - t_0}$$

$$\tau\theta - \tau t_0 = Tt_к - T\theta$$

$$\theta = \frac{Tt_к + \tau t_0}{T + \tau} = \frac{12 \cdot 100 + 4 \cdot 20}{12 + 4} = \frac{1280}{16} = 80\ ℃$$

9.4. Гоночный автомобиль совершает заезд по кольцевой трассе по часовой стрелке (см. рис). Автомобиль двигается с максимально возможной скоростью (на грани заноса). Пройдя последние 5 кругов за 5 мин 14 с, автомобиль пересекает линию финиша в точке Ф, выезжает на прямолинейную дорогу ФО. Гонщик сразу начинает резко тормозить (на грани проскальзывания колёс о дорогу) и останавливается в точке О. Найдите время торможения τ. Кольцевая и прямолинейная дороги лежат в горизонтальной плоскости; свойства дорожного покрытия везде одинаковы.



Решение

Обозначим время одного оборота T (период обращения). Ускорение торможения на ФО и центростремительное ускорение $2\pi v/T$ равны между собой.

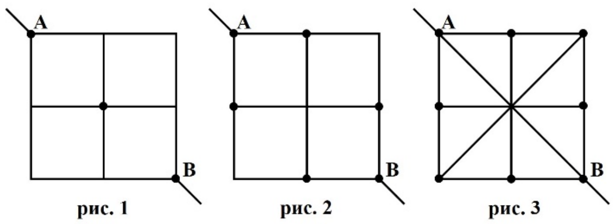
Тогда:

$$\frac{2\pi v}{T} = \frac{v}{\tau} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{T}{2\pi}$$

$$\tau = \frac{T}{2\pi} = \frac{t}{10\pi} = \frac{314}{31.4} = 10\ c$$

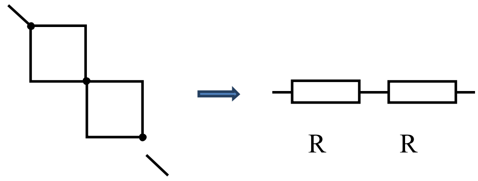
Ответ: $\tau = \frac{t}{10\pi} = 10\ c.$

9.5. Квадратная пластина из тонкого медного листа разрезана на четыре одинаковых квадрата. Если в точке пересечения разрезов все малые квадраты соединить каплей припоя, то сопротивление между точками A и B будет равно R_1 (рис. 1). Если эти же малые квадраты соединить четырьмя каплями, помещёнными в точках пересечения разрезов со сторонами исходного квадрата (рис. 2), то сопротивление между точками A и B будет равно R_2. Полученную фигуру дополнительно разрезают по главным диагоналям, а затем скрепляют ещё четырьмя каплями припоя в точках пересечения разрезов с границей исходного квадрата (рис. 3). Определите в этом случае сопротивление между точками A и B. Разрезы полностью изолируют части пластины друг от друга, а сопротивление припоя пренебрежимо мало.



Решение.

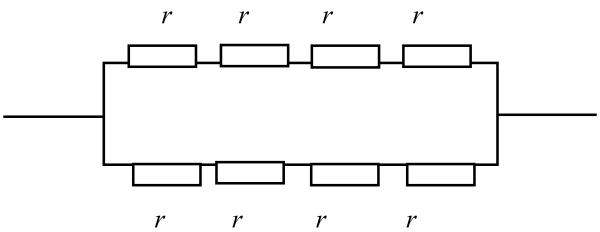
Поскольку все разрезы изолированные, то для первой схемы останется:



Для эквивалентной схемы, считая сопротивление квадрата равным *R*,

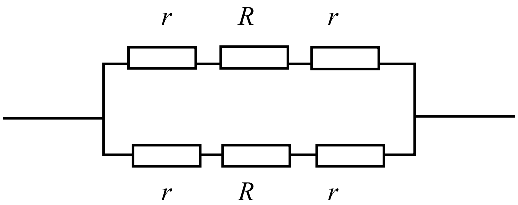
получим: $R_1 = 2R$.

Для третьей схемы получим, обозначив сопротивление треугольников как r :



$R_3 = 2r$.

Для второй схемы, учитывая введённые обозначения, получим:



$R_2 = \dfrac{2r + R}{2}$.

Решая систему, получим:

$$\begin{aligned} R &= R_1 / 2 \\ r &= R_2 + 0,25R_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad R_3 = 2R_2 + 0,5R_1$$

Ответ: $R_3 = 2R_2 - 0,5R_1$