Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11111 для 11 класса

1. Некоторый параметр технологического процесса в области энергетики изменяется во времени по закону

$$p(t) = \frac{81^t + 9^t + 5}{(9^t + 1)^2}.$$

С точки зрения безопасности важно, чтобы его значения не опускались ниже известного порога. Найдите наименьшее значение параметра $p(t)$ или докажите, что его не существует.

2. На куске электрокабеля, свернутом и запаянном в виде окружности радиуса R, расположены три клеммы, образующие равнобедренный треугольник. Основание этого треугольника находится на расстоянии c от центра окружности.

1) Найдите длины сторон и площадь треугольника.

2) Над этим треугольником монтируют кожух в виде прямой призмы высоты h. Найдите объем кожуха.

3. Числа $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $0,5\,\mathrm{tg}\,\alpha$ являются первыми тремя членами геометрической прогрессии. Найдите эти числа и следующий член прогрессии. Выясните, является ли число $1/486$ членом указанной прогрессии и, если это так, найдите его номер.

4. Обозначим как $S_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ среднее арифметическое n чисел $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $n \geq 2$ и $1 \leq m < n$. Найдите числа $c_1, \ldots, c_m$ такие, что

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = S_m(x_1 + \cdots + x_n + c_1, \ldots, x_1 + \ldots + x_n + c_m).$$

Однозначно ли они определяются?

5. Целая часть $[x]$ действительного числа x — это наибольшее целое число m такое, что $m \leq x$, например, $[5/4] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-3/4] = -1$, $[2] = 2$. Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\left[\frac{x + |x - y|}{2}\right] = x.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12114 для 11 класса

1. Найдите остаток от деления многочлена

$$x^{2019} - 2x^{2018} + 3x^{2017} - \ldots - 2018x^2 + 2019x$$

на многочлен $x^3 - x$.

2. При всевозможных значениях параметра p рассмотрим уравнение

$$\sin x = p\cos^2 x.$$

А) Найдите все значения p, при которых корнем уравнения является число $\alpha = 2020\pi$.

Б) Решите уравнение для всех допустимых значений параметра p.

3. Фрекен Бок, Малыш и Карлсон купили 1 кг конфет. Могут ли они разделить конфеты так, чтобы один получил $1/2$ от доли остальных, второй – $1/3$ от доли остальных, а третий – $1/6$ от доли остальных? Либо найдите соответствующие количества конфет, либо докажите невозможность описанного дележа.

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = 2a$. Высота трапеции равна $3a$. Определите (и обоснуйте!), существует ли внутри трапеции точка O такая, что лучи OA, OB, OC и OD делят полный угол вокруг точки O на четыре равные части.

Если такая точка O существует, то найдите наименее возможный объем пирамиды с высотой длины a, выходящей из точки O. Основание пирамиды — эта трапеция. Если такой точки O не существует, найдите наименее возможный объем прямой призмы высоты a, основанием которой является эта трапеция.

5. Пончик и Сиропчик разрезали круглый вечерний торт на 33 дольки (сходящиеся в центре) и по очереди съедают либо одну, либо две соседние дольки (на свое усмотрение). Тот, кто съест последнюю дольку, получает призовую коврижку. Начинает Пончик (так выпал жребий). Кто из коротышек может гарантированно получить коврижку? Опишите (и обоснуйте) его выигрышную стратегию.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13111 для 11 класса

1. Пренебрежение законами свободного рынка может делать бизнес неустойчивым и вести к разорению одного из участников. Так, нефтяная компания «Сверхжадность» вела дело следующим образом. Получив за месяц прибыль, компания увеличивала добычу и повышала цену, чтобы в следующем месяце получить еще бóльшую прибыль. Однако спрос снижался, и компания терпела убытки (получала отрицательную прибыль). В следующtм за этим месяце компания сокращала добычу и снижала цену, спрос возрастал, и возрастала прибыль. В последующие два месяца аналогичный эффект повторялся. При этом прибыль в j-й месяц описывается формулой

$$a_j = (-1)^j(3j-2), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдите суммарную прибыль $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ этой компании за n месяцев ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

2. Два космических аппарата движутся в одной плоскости каждый по своей орбите. Орбиты задаваются уравнениями

$$x = 2x^2 + 2y^2 \quad \text{и} \quad 16x^2 + 32y + 16y^2 = 1.$$

Найдите все возможные значения, которое может принимать рассстояние между этими аппаратами. Могут ли аппараты столкнуться?

3. Изобразите на координатной плоскости все решения (x, y) системы уравнений с двумя неизвестными x, y и параметром p.

$$\begin{cases} 2^x &= 4^{py}, \\ 2^{py} &= 4^x. \end{cases}$$

4. Вершина A треугольника ABC соединена отрезком с центром описанной окружности O. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

5. Докажите, что $\sqrt{\underbrace{222\ldots222}_{2020\text{ раз}} - \underbrace{444\ldots444}_{1010\text{ раз}}} = \sqrt{2} \cdot \underbrace{333\ldots333}_{1010\text{ раз}}$.