Лучшие задачи отборочного этапа Олимпиады по предмету «математика»
с решениями (2019/2020).

Некоторые задачи с решениями

Задача 1 (11 класс).

Найдите остаток от деления многочлена

$$x^{2019} - 2x^{2018} + 3x^{2017} - \ldots - 2018x^2 + 2019x$$

на многочлен $x^3 - x$.

Решение.

Обозначим исходный многочлен через $P(x)$, а частное через $Q(x)$. Поскольку делитель имеет степень 3, то остатком будет многочлен степени не выше второй. Таким образом,

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^3 - x) + ax^2 + bx + c.$$

Подставим в это равенство поочередно $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

$$\begin{cases} P(0) = 0 + c, \\ P(1) = 0 + a + b + c, \\ P(-1) = 0 + a - b + c. \end{cases}$$

Остается вычислить значения $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ и решить полученную систему. Имеем

$$P(0) = 0,$$

$$P(1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2017 - 2018 + 2019 =$$
$$(1-2) + (3-4) + \ldots + (2017 - 2018) + 2019 = (-1) \cdot 1009 + 2019 = 1010.$$

$$P(-1) = -1 - 2 - 3 - 4 - \ldots - 2019 = -\frac{1 + 2019}{2} \cdot 2019 = -1010 \cdot 2019.$$

Теперь система для коэффициентов принимает вид

$$c = 0,$$
$$\begin{cases} a + b = 1010, \\ a - b = -1010 \cdot 2019. \end{cases}$$

Откуда

$$a = -1010 \cdot 1009, \qquad b = 1010^2.$$

Ответ.

$-1019090x^2 + 1020100x = -1010 \cdot 1009x^2 + 1010^2 x = 1010x(1010 - 1009x).$

Задача 2 (11 класс).

Решите уравнение с двумя неизвестными и функцией целой части

$$\left[\frac{x+|x-y|}{2}\right]=x.$$

Решение.

1. Левая часть — целое число, поэтому и правая часть, число x, — целое.

2. Уравнение равносильно системе неравенств $x \leq (x+|x-y|)/2 < x+1$ при целых x, т. е.

$$x \leq |x-y| < x+2, \qquad x \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

3. При $x \leq y$ из (1) получаем систему условий

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}, & \\ x \leq y, & (2) \\ 2x \leq y < 2x+2. & (3) \end{cases}$$

Подставляя в (2) и (3) целые x, находим:
если $x=0$, то $y \in [0;2)$; если $x=1$, то $y \in [2;4)$; если $x=2$, то $y \in [4;6)$; ...; если $x=-1$, то $y \in [-1;0)$. Если же $x \leq -2$, то $2x+2 \leq x$ и поэтому неравенства $y \geq x$ и $y < 2x+2$ несовместны. Итак, получаем следующие решения $(x;y)$:

$$\left[\begin{array}{ll} x=-1, & y \in [-1;\ 0); \\ x=0,1,2,\ldots, & y \in [2x;\ 2x+2). \end{array}\right. \tag{4}$$

4. При $x \geq y$ из (1) получаем систему условий

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}, \\ x \geq y, \\ -2 < y \leq 0. \end{cases}$$

Если $x \geq 0$, то $y \in (-2;\ 0]$. Если $x=-1$, то $y \in (-2;\ -1]$. Если же $x \leq -2$, то неравенства $y \leq x$ и $y > -2$ несовместны.

Итак, получаем следующие решения $(x;y)$:

$$\left[\begin{array}{ll} x=-1, & y \in (-2;\ -1]; \\ x=0,1,2,\ldots, & y \in (-2;\ 0]. \end{array}\right. \tag{5}$$

Объединяя решения (4) и (5), получаем

Ответ: пары $(x;y)$ такие, что

$$\left[\begin{array}{ll} x=-1, & y \in [-2;\ 0); \\ x=0,1,2,\ldots, & y \in (-2;\ 0] \cup [2x;\ 2x+2). \end{array}\right.$$

Задача 3 (10 класс).

Некоторый параметр технологического процесса в области энергетики изменяется во времени по закону

$$p(t) = \frac{t^4 + t^2 + 5}{(t^2 + 1)^2}.$$

С точки зрения безопасности важно, чтобы его значения не опускались ниже известного порога. Найдите наименьшее значение параметра $p(t)$ или докажите, что его не существует.

Решение. Сделаем замену $t^2 = x \geq 0$. Тогда

$$p(t) = f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{(x + 1)^2} = 1 - \frac{1}{x + 1} + \frac{5}{(x + 1)^2} = 5u^2 - u + 1,$$

где $u = 1/(x + 1)$. Квадратный трехчлен $g(u) = 5u^2 - u + 1$ имеет минимум при $u = u_0 = -(-1)/(2 \cdot 5)$. Значению u_0 соответствуют значения $x_0 = 9$ и $t_0 = 3$ $(t > 0)$. Таким образом,

$$p_{min}(t) = p(t_0) = f(x_0) = g(u_0) = 5 \cdot (0,1)^2 - 0,1 + 1 = 0,95.$$

Ответ: $p_{min} = 0,95$.

Задача 4 (10 класс).

Пусть $X(p)$ — множество всех корней уравнения

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{p^2}{\sin^2 x}.$$

Найдите все p, для которых множество $X(p)$ непусто и отлично от множества $X(0)$.

Решение

1. ОДЗ переменной определяется неравенством $\sin x \cos x \neq 0$.

2. При $p = 0$ получаем $X(0) = \emptyset$.

3. Преобразуем уравнение на его ОДЗ: $\sin^4 x = p^2 \cos^2 x$.
Заменяя $\cos^2 x = t$, $0 < t < 1$, получаем:

$$(1 - t)^2 = p^2 t \;\Leftrightarrow\; t^2 - (2 + p^2)t + 1 = 0.$$

4. Если $p = 0$, то $t = \cos^2 x = 1$ не входит в ОДЗ.

5. При $p \neq 0$ квадратное уравнение имеет дискриминант $p^2(4 + p^2) > 0$ и корни

$$t_1 = \frac{2 + p^2 - \sqrt{p^2(4 + p^2)}}{2}, \qquad t_2 = \frac{2 + p^2 + \sqrt{p^2(4 + p^2)}}{2},$$

причем $0 < t_1 < 1$, $t_2 > 1$. Таким образом,

$$\text{если } p \neq 0, \text{ то } X(p) = \{x \mid \cos^2 x = t_1\},\ X(p) \neq \emptyset,\ X(p) \neq X(0).$$

Ответ: $p \neq 0$.

Задача 5 (10 класс).

Пренебрежение законами свободного рынка может делать бизнес неустойчивым и вести к разорению одного из участников. Так, нефтяная компания «Сверхжадность» вела дело следующим образом. Получив за месяц прибыль, компания увеличивала добычу и повышала цену, чтобы в следующем месяце получить еще бóльшую прибыль. Однако спрос снижался, и компания терпела убытки (получала отрицательную прибыль). В следующtм за этим месяце компания сокращала добычу и снижала цену, спрос возрастал, и возрастала прибыль. В последующие два месяца аналогичный эффект повторялся. При этом прибыль в j-й месяц описывается формулой

$$a_j = (-1)^j (3j - 2), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдите суммарную прибыль $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ этой компании за n месяцев ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Решение.

Вычислим первые члены последовательности и их суммы:

j	0	1	2	3	4	5
a_j	-2	-1	4	-7	10	-13
S_j	-2	-3	1	-6	4	-9

Заметим, что

$$S_{k+2} = S_k + a_{k+1} + a_{k+2} = S_k + (-1)^{k+1}(3(k+1) - 2) + (-1)^{k+2}(3(k+2) - 2) =$$

$$= S_k + (-1)^{k+1}(3k + 1) + (-1)^k (3k + 4).$$

Если k четно, т. е. $k = 2m$, то

$$S_{k+2} = S_k - (3k + 1) + (3k + 4) = S_k + 3, \quad S_0 = -2,$$

откуда

$$S_{2m} = -2 + 3m.$$

Если же k нечетно, $k = 2m + 1$, то

$$S_{k+2} = S_k + (3k + 1) - (3k + 4) = S_k - 3, \quad S_1 = -3,$$

откуда

$$S_{2m+1} = -3(m + 1).$$

Ответ. Если n четно, то $S_n = (3/2)n - 2$.
Если n нечетно, то $S_n = (-3/2)(n+1)$.

Задача 6 (9 класс).

Найдите x, y, z, при которых равенство

$$\frac{x}{a-1} + \frac{y}{a} + \frac{z}{(a-1)^2} = \frac{2a^2+a-2}{a^3-2a^2+a}$$

выполняется при всех допустимых a.

Решение.

Приведем дроби в левой части равенства к общему знаменателю.

$$\frac{a^2x - ax + a^2y - 2ay + y + az}{a(a-1)^2} = \frac{2a^2+a-2}{a^3-2a^2+a}.$$

Поскольку знаменатели дробей равны, должны быть тождественно равны их числители (т.е. равны при любых значениях a). Это равенство будет иметь место, когда равны коэффициенты при разных степенях a в левой и правой частях равенства. Получаем

$$\begin{aligned} &\text{при } a^2: & x + y = 2,\\ &\text{при } a: & -x - 2y + z = 1,\\ &\text{свободные члены}: & y = -2. \end{aligned}$$

Решая полученную систему, находим

Ответ: $x = 4$, $y = -2$, $z = 1$ при $a \neq 0$, $a \neq 1$.

Задача 7 (9 класс).

Имеется два одинаковых полностью заряженных аккумулятора для электропылесосов. В пылесосе «Вихрь» аккумулятор разряжается за 25 часов непрерывной работы, в пылесосе «Бриз» — за 35 часов. Аккумуляторы можно переставлять с одного пылесоса на другой. Какое наибольшее время непрерывной работы обоих пылесов могут обеспечить два таких аккумулятора?

Решение. Пусть x и y — время (в часах) работы одного аккумулятора на пылесосе «Вихрь» и пылесосе «Бриз». Разрядка аккумулятора при работе на двух устройствах означает, что

$$\frac{x}{25} + \frac{y}{35} = \frac{y}{25} + \frac{x}{35} = 1,$$

откуда $x = y = 175/12$. Два аккумулятора обеспечивают вдвое большее время работы пылесосов $175/6$ часов, т. е. 29 и $1/6$ часа.

Ответ: 29 часов 10 минут.

Задача 8 (9 класс).

Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\frac{x + |x - y|}{2} = x.$$

Решение. Преобразуем уравнение к эквивалентному виду $|x - y| = x$.

Если $x \leq y$, то, раскрывая модуль, получаем $y = 2x$. Условие $x \leq y$ означает в этом случае, что $x \leq 2x$, т. е. $x \geq 0$. Итак, получены решения $(x, y) = (x, 2x)$, где $x \geq 0$.

Если $x \geq y$, то, раскрывая модуль, получаем $y = 0$. Условие $x \geq y$ означает в этом случае, что $x \geq 0$. Получены решения $(x, y) = (x, 0)$, где $x \geq 0$.

(Ограничение $x \geq 0$ можно также сразу получить из равенства $x = |x - y|$.)

Ответ: пары чисел $(x, 0), (x, 2x)$ при $x \geq 0$.

Задача 9 (8 класс).

В классе 30 учеников. Средний рост всех учеников класса равен 165 см. Средний рост девочек равен 162 см, а средний рост мальчиков равен 172 см. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Решение.

Пусть в классе n мальчиков и m девочек. Обозначим через Sx - суммарный рост мальчиков, а через Sy - суммарный рост девочек. По условиям задачи

$$\frac{Sx + Sy}{n + m} = 165, \quad \frac{Sx}{n} = 172, \quad \frac{Sy}{m} = 162,$$

т.е.

$$Sx + Sy = 165(n + m), \quad Sx = 172\,n, \quad Sy = 162\,m,$$

откуда $172n + 162m = 165n + 165m$ или

$$7n = 3m.$$

Поскольку $n + m = 30$, то остается решить полученную систему двух уравнений. получаем 21 мальчика и 9 девочек.

Ответ. 21 мальчик; 9 девочек.

Задача 10 (8 класс).

Квадрат $ABCD$ имеет площадь 100 см^2. Точки M и N — середины его сторон BC и CD. В треугольник CMN вписана окружность, она касается отрезка MN в точке K. Найдите расстояние AK. (*Окружность и прямая касаются*, если они имеют ровно одну общую точку, она называется *точкой касания. Окружность вписана в многоугольник*, если она касается каждой из его сторон. *Касательная к окружности и диаметр, проходящий через точку касания, перпендикулярны.*)

Решение. 1. Треугольники CMN и AMN равнобедренные, $\triangle ABM = \triangle ADN$. Пусть их площади и площадь квадрата есть

$$S(AMN) = x,\ S(ABM) = S(ADN) = y,\ S(CMN) = z,\ S(ABCD) = a^2 = 100.$$

Тогда

$$x + 2y + z = 100.$$

2. Сторона квадрата $a = 10$, следовательно,

$$z = (a/2)^2/2 = 25/2, \quad y = a \cdot (a/2)/2 = 25, \quad x = 100 - 2y - z = 75/2.$$

3. Имеем $x = MN \cdot AK/2 = 3z = 3 \cdot MN \cdot CK$, следовательно, $AK = 3 \cdot CK = 3d/4$, где d — длина диагонали квадрата.

4. Можем вычислить площадь квадрата как $100 = a^2 = d^2/2$, откуда $d = 10\sqrt{2}$ и $AK = (3/4) \cdot 10\sqrt{2} = 15\sqrt{2}/2$.

Ответ: $15\sqrt{2}/2$ см.

Задача 11 (8 класс).

Найдите количество решений числового ребуса

$$\begin{array}{r} & *\ *\ 0\ * \\ + & *\ 0\ *\ * \\ \hline & 3\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Решение.

Символ $*$ означает произвольную цифру от 0 до 9. Самые левые $*$ не могут означать 0. Поэтому они означают либо 1 либо 2.

Случай А). Если одно слагаемое начинается с 1, а другое с 2, то получаем два очевидных решения такого вида

$$\begin{array}{r} & 1\ 0\ 0\ 1 \\ + & 2\ 0\ 0\ 0 \\ \hline & 3\ 0\ 0\ 1 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} & 1\ 0\ 0\ 0 \\ + & 2\ 0\ 0\ 1 \\ \hline & 3\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Других вариантов здесь нет.

Случай Б). Если оба слагаемых начинаются с 1, то в разряд тысяч был перенос.

$$\begin{array}{r} 1\ *\ 0\ * \\ +\ 1\ 0\ *\ * \\ \hline 3\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Значит, в первом слагаемом должно быть 9 сотен и перенос из предыдущего разряда. Рассуждая аналогично, приходим к конфигурации

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 0\ * \\ +\ 1\ 0\ 9\ * \\ \hline 3\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Две последние цифры должны в сумме давать 11 (чтобы был перенос разряда). Их можно выбрать 8-ю способами

$$2 + 9 = 3 + 8 = \cdots = 9 + 2.$$

Итого в обоих случаях вместе набирается 10 вариантов.

Ответ. 10.

Задача 12 (7 класс).

В левый карман школьного пиджака «Последняя надежда» помещается сразу два справочника по математике, а в правый – даже четыре справочника. Сколькими различными способами можно разместить 6 справочников по обоим карманам этого спасительного пиджака?

Решение.

Найдем сначала общее количество способов распределить 6 справочников в разном порядке. Оно равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Из всех этих комбинаций те, в которых в первый карман попадают одни и те же справочники (но в разном порядке), будут неразличимы. Таких комбинаций 2. Поэтому общее количество уменьшается до $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2}$.

Из оставшихся вариантов будут неразличимы те, в которых во второй карман попадают одни и те же справочники. Таких вариантов $4 \cdot 3 \cdot 2$.

Поэтому окончательно получаем

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2)} = 15.$$

Ответ. 15.

Задача 13 (7 класс).

Дата 2 февраля 2020 г. довольно интересна. Её цифровая запись 02.02.2020 симметрична и состоит всего лишь из двух различных цифр. Найдите все даты в третьем тысячелетии, обладающие такими же свойствами: цифровая запись даты симметрична и содержит ровно две различные цифры.

Решение. Запись такой даты имеет вид $XY.Z2.2ZYX$, где $X, Y, Z \in \{0, 1, \dots, 9\}$. При этом $Z2$ — запись порядкового номера месяца, следовательно, возможны только $Z = 0$ и $Z = 1$.

Если $Z = 0$, то запись даты есть $XY.02.20$ Для цифр X, Y выполняются условия:
1) $XY \in \{01, 02, \dots, 31\}$
2) $X, Y \in \{0, 2\}$.
Им соответствуют три даты: 02.02.2020, 20.02.2002, 22.02.2022.

Если же $Z = 1$, то запись даты имеет вид $XY.12.21YX$. При этом выполняются условия 1) и
3) $X, Y \in \{1, 2\}$.
Им соответствуют 4 даты:

11.12.2111, 12.12.2121, 21.12.2112, 22.12.2122.

Ответ. Всего 7 дат:
20.02.2002, 02.02.2020, 22.02.2022, 11.12.2111, 21.12.2112, 12.12.2121, 22.12.2122.

Задача 14 (6 класс).

На предновогоднем слете каждая из прибывших туда 2020 снегурочек загадала случайным образом некоторое число. Оказалось, что каждое из этих 2020 чисел равно сумме любых двух других из них. Найдите сумму всех загаданных снегурочками чисел.

Решение.

Возбмем три произвольные числа из 2020-ти загаданных. Обозначим их a, b, c. Согласно условию,

$$\begin{cases} a = 2 \cdot (b + c), \\ b = 2 \cdot (a + c), \\ c = 2 \cdot (a + b). \end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем $a = b = c = 0$. Отсюда следует, что все числа равны нулю, и их сумма также.

Ответ. Сумма равна 0.

Задача 15 (5 класс).

Пончик и Сиропчик, накрывая новогодний стол, разложили все свои кулебяки одинаковыми рядами. При этом оказалось, что как количество рядов, так и количество кулебяк в каждом из них выражается четным числом, не кратным четырем. Верно ли, что если к ним на праздник придут Фуксия и Селедочка, то каждому достанется одинаковое количество кулебяк?

Решение.

Общее количество кулебяк, согласно условию, равно произведению четных чисел. Каждое из них содержит множитель 2. Следовательно, их произведение будет содержать множитель 4. Таким образом, общее количество кулебяк делится 4.

То же самое можно записать формулами. Если в ряду $2m$ кулебяк, а всего рядов $2k$, то общее количество равно

$$(2m) \cdot (2k) = 4 \cdot k \cdot m,$$

следовательно, делится на 4 без остатка.

Ответ. Верно.