ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса

Задача 1.

Числовая характеристика x некоторого теплоэнергетического процесса является корнем уравнения
$$x^3 - 3x = t,$$
где t — температура окружающей среды, измеряемая в градусах Цельсия. По некоторым технологическим соображениям корень должен быть единственным. При каких значениях t уравнение имеет единственный корень x_0? Оцените снизу абсолютную величину этого корня и покажите, что полученную оценку улучшить нельзя.

Решение.

Нетрудно построить график функции $y = x^3 - 3x$, заметив, что эта функция нечетная, обращается в 0 ровно в трех точках $x = 0, \pm\sqrt{3}$, $(1; -2)$ является точкой минимума, а $(-1; 2)$ является точкой максимума, функция неограниченно возрастает при $x > 1$ и неограниченно убывает при $x < -1$. Таким образом, число корней равно
3, если $|t| < 2$,
2, если $|t| = 2$,
1, если $|t| > 2$.
Единственный корень есть в точности при $|t| > 2$.

Далее оценим абсолютную величину корня x при $|t| > 2$. Из графика видно, что $|x| > \sqrt{3}$. Можно получить и более точную оценку, рассматривая неравенства $x^3 - 3x > 2$ при $t > 2$ и $x^3 - 3x < -2$ при $t < -2$. Замечая, что $x^3 = 2 + 3x$ при $x = 2$, а также $x^3 = -2 + 3x$ при $x = -2$, находим $|x| > 2$.

Допустимо также геометрическое решение, основанное на том наблюдении, что предельный (промежуточный) случай двух корней соответствует ситуации, когда одним из корней является точка экстремума.

Ответ.
Уравнение имеет единственный корень в точности при $|t| > 2$.
Для этого корня справедливо нер-во $|x| > 2$.

Задача 2.

Для каждого целого значения параметра K решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ ([x] - x)^2 - 2[y] = K. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.

Решение.

Пусть

$$x = M + a, \quad y = N + b, \quad M, N \in \mathbb{Z}, \qquad a, b \in [0; 1).$$

Из первого уравнения получаем $2M + N + b = 3/2$ и тогда

$$b = 0,5, \qquad N = 1 - 2M.$$

Подставим эти значения во второе уравнение:

$$(-a)^2 - 2(1 - 2M) = K.$$

Тогда

$$a = 0, \qquad K = 4M - 2, \qquad x = M, \qquad y = 3/2 - 2M.$$

Ответ.

Если $K = 4M - 2$, где $M \in \mathbb{Z}$, то $x = M$, $y = 3/2 - 2M$.

При других K решений нет.

Задача 3.

Две равные окружности пересекаются в точках P и Q. Произвольная прямая, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B, а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle QPA$, $\angle CBA = \angle BPQ$. Следовательно, $\angle BPA + \angle ACB = \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = \pi$, т.е. четырехугольник $APBC$ вписанный (рис.1). Значит, $\angle BPC = \angle BAC = \angle QPA$, ч.т.д.

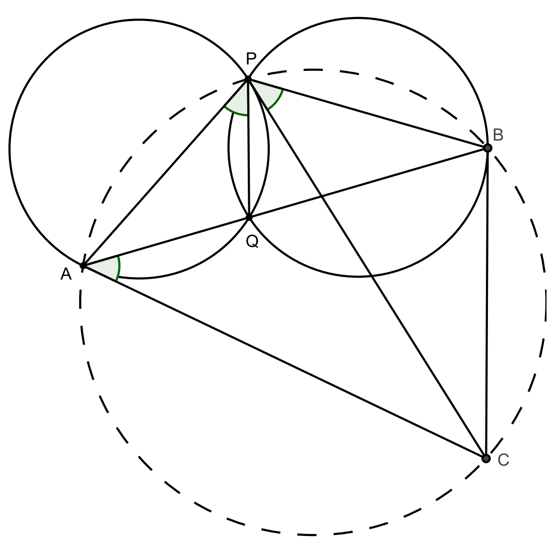

Рис.1.

Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично, например, на рис.2 $\angle ACB = \angle CAQ - \angle CBQ = (\pi - \angle QPA) - (\pi - \angle QPB) = \angle APB$ и $\angle QPA = \angle BAC = \angle BPC$.

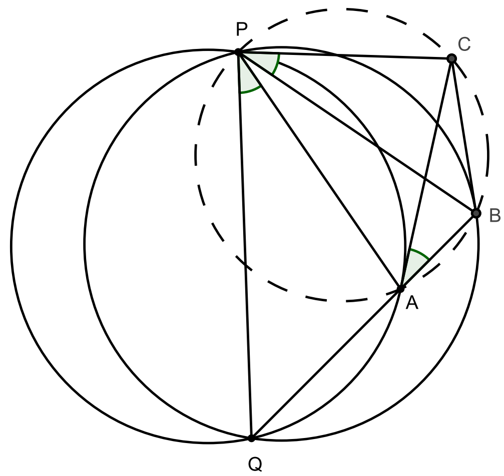

Рис.2.

Задача 4.

При обработке числовых данных часто приходится вычислять среднее арифметическое

$$S(x, y) = (x + y)/2$$

и решать уравнения, содержащие среднее арифметическое. Найдите все конечные (состоящие из конечного числа элементов) числовые множества X такие, что для любых a и b из X множество X содержит корень x уравнения

$$S(a, x) = b.$$

Решение. Имеем

$$S(a, x) = b \;\Leftrightarrow\; x = 2b - a. \tag{1}$$

Требуемым в условии задачи свойством обладает любое одноэлементное множество

$$X = \{a\}, \quad a \in (-\infty; \infty), \tag{2}$$

так как $S(a, a) = a$.

Допустим далее, что множество X содержит по крайней мере два различных элемента c, d, причем $c < d$ (без ограничения общности). Для уравнения $S(d, x) = c$ находим, согласно (1), $x = 2c - d$. Затем для уравнения $S(d, x) = 2c - d$ получаем $x = 4c - 3d$, после чего рассматриваем уравнение $S(d, x) = 4c - 3d$ и получаем $x = 16c - 15d$. Продолжая таким же образом, получаем последовательность решений

$$c,\ 2c - d,\ 4c - 3d,\ 16c - 15d, \ldots. \tag{3}$$

Покажем, что все ее члены $x_n = 2^n c - (2^n - 1)d, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ попарно различны. Если допустить, что $x_n = x_m$ при $n \neq m$, то, преобразуя равенство, получим $(2^m - 2^n)c = (2^m - 2^n)d$, откуда $c = d$, это невозможно. Итак, множество X содержит бесконечное подмножество — последовательность (3), следовательно, множество X бесконечно.

Ответ: в точности все одноэлементные множества $X = \{a\},\ a \in (-\infty; \infty)$.

Задача 5.

Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно: а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1; б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2; в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1; г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2. Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Решение.

Обозначим через n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ количество действий каждого из четырех возможных типов. Требуется решить систему (первое уравнение соответствует изменению количества пятерок, второе – двоек)

$$\begin{cases} 2n_1 + n_2 - 2n_3 - n_4 = 30 - 3 = 27, \\ -n_1 + 2n_2 + n_3 - 2n_4 = 3 - 30 = -27. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два и сложим с первым.

$$5n_2 - 5n_4 = -27$$

или

$$5(n_2 - n_4) = -27.$$

Согласно условию, величина $m = n_2 - n_4$ является целым числом. Однако уравнение $5m = -27$ не имеет решения в целых числах.

Ответ. Не может.