

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 11993 для 9 класса

1. Выясните, существует ли натуральное число n , для которого верно равенство

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{6}{125} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{5^n} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{(n-1) \text{ раз}} 2.$$

Либо найдите все такие числа n , либо докажите невозможность равенства.

2. Трубы нефтепровода составляют сетку, разделяющую прямоугольник 3×8 на 24 одинаковых квадрата, каждая труба — сторона одного такого квадрата или общая сторона двух смежных квадратов. Какое наименьшее число труб достаточно обойти монтеру, чтобы установить на каждой трубе датчик давления и вернуться в исходную вершину сети? При этом некоторые трубы придется, возможно, пройти более одного раза. Есть ли такие трубы, какие они, сколько их? Как изменится результат, если исходный прямоугольник будет иметь размеры 24×1 ?

3. Фундамент торгового комплекса «Все нипочем» представляет собой криволинейный треугольник. Если провести для удобства координатные оси, то две его стороны совпадут с этими осями, а третья сторона пройдет по линии $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Здесь $a > 1$ — известный параметр. На этом фундаменте планируется возвести здание в форме прямоугольника, один из углов которого должен лежать на криволинейной стороне, а противоположный — совпадать с началом координат. Найдите размеры здания $X \times Y$, при которых его площадь будет максимальна.

4. По прямым параллельным путям, расстояние между которыми 60 м, равномерно движутся два поезда в противоположных направлениях. Длина каждого поезда равна 100 м. Стрелочник находится на расстоянии 40 м от ближайшего к нему пути. Первый поезд загромождает от стрелочника часть второго поезда (то есть второй поезд ему виден не целиком или вообще не виден) в течение 5 с. Скорость первого поезда равна 16 м/с. Найдите скорость второго поезда. (Шириной поездов можно пренебречь.)

5. При каких целых n число $n^4 + 2n^3 + 9n^2 + 8n$ кратно 4?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 12991 для 9 класса

1. В десятичной записи числа M две цифры оказались пропущены. Они обозначены ниже подчеркиваниями.

$$M = 15! = 1\ 307\ 67_368_00.$$

Можно ли восстановить эти цифры, не выполнив ни одного умножения? Либо найдите их указанным способом, либо покажите, что это сделать невозможно.

(Запись $k!$ обозначает произведение всех подряд идущих натуральных чисел от 1 до k включительно и называется факториалом числа k .)

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned}x^2 &= (y - z)^2 - 3, \\y^2 &= (x - z)^2 - 7, \\z^2 &= (x - y)^2 + 21.\end{aligned}$$

3. Из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ удалили одно число X , среднее арифметическое оставшихся чисел составило $59/4$. Найдите n и X .

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и K так, что периметр треугольника CMK в два раза больше стороны квадрата. Найдите величину угла MAK .

5. Найдите все функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющие условию: если любой из коэффициентов a, b, c заменить на 1, то полученные функции имеют ровно один корень.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 13093 для 9 класса

1. Положительные числа x , y , z не превосходят единицы. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{x+y}{2} + z\right)^2 \geq x^2 + y^2 + 4z^2.$$

2. Снежная королева собирается предложить пленнику свободу, если он нарисует такой 2019-угольник, все стороны которого может пересечь одна единственная прямая, не проходящая через его вершины. Каковы шансы пленника? Либо нарисуйте такие 2019-угольник и прямую, либо обоснуйте, что это сделать невозможно.

3. Карельский Паккайне на новый год достает волшебный пояс, который по своей длине разделен на четыре разноцветные части. Длина всех частей кроме голубой равна 145 см, других трех частей кроме синей – 175 см, трех частей без сиреневой – 170 см, трех частей без белой – 95 см. Какова длина всего пояса? Какова длина его наименьшей части? Можно ли дать ответы на эти вопросы, не находя длины всех частей?

4. Для гарантии новогоднего настроения вдоль прямолинейной набережной установлены пять снежных пушек с электроприводом. Расстояния между парами соседних пушек равны 100, 200, 300 и 700 м. Где следует установить электрогенератор, чтобы суммарная длина проводов, ведущих к пушкам, была минимальной (каждая пушка соединена с генератором напрямую прямолинейным проводом)?

5. Деда Морозы из разных регионов собрались на ежегодный симпозиум. Оказалось, что Дедов Морозов в синих шубах, но без посоха было меньше, чем Дедов Морозов с посохом, но выбравших шубы другого цвета. Каких Дедов Морозов было больше: в синих шубах или с посохом?