ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 11112 для 11 класса

1. Выясните, существует ли натуральное число n, для которого найдутся натуральные числа k_1, k_2, k_3, k_4 такие, что

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{k_1}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^{k_2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)^{k_3}\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)^{k_4}=10^n.$$

Если таких чисел n несколько, то найдите показатели k_1, k_2, k_3, k_4 степени для каждого допустимого n.

2. По разным берегам прямолинейного канала в одном и том же направлении равномерно движутся две колонны бронетехники. Длина каждой колонны равна 100 м. Шпион находится на расстоянии 90 м от дальнего берега. Ближняя колонна движется в 4 раза быстрее и загораживает от шпиона часть дальней колонны (то есть дальняя колонна ему видна не целиком или вообще не видна) в течение 5 с. Скорость дальней колонны равна 10 м/с. Найдите расстояние от шпиона до ближнего берега. (Шириной бронетехники можно пренебречь.)

3. Элементы A, B, C, D, E, F, G, H, I, J электрической схемы соединены проводниками AB, AD, AF, BC, CJ, DE, DG, EF, EH, FI, GH, HI. Робот должен обойти все проводники для поиска обрыва и вернуться в начало своего маршрута (один из элементов A, B,. . ., J). При этом некоторые проводники, возможно, придется пройти более одного раза. Найдите наименьшее достаточное для выполнения задачи робота количество пройденных им проводников. Есть ли проводники, которые необходимо проходить более одного раза, сколько их и каково количество повторений, какие это проводники?

4. Функции $T_n(x)$ определены при всех $x\in(-\infty;\infty)$ и целых $n\geq 0$ условиями

$$\begin{cases} T_0(x)=1, \qquad T_1(x)=x,\\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), \quad n\geq 1.\end{cases}$$

Решите относительно неизвестного φ уравнение $T_n(\cos\varphi)=1$.

5. При каких целых n число $2n^4+3n^3+n^2$ кратно 6?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 12112 для 11 класса

1. В десятичной записи числа M две цифры оказались пропущены. Они обозначены ниже подчеркиваниями.

$$M = 4 \cdot 13! + 3 \cdot 14! = 286\_42\ 95\_800.$$

Можно ли восстановить эти цифры, не выполнив ни одного умножения? Либо найдите их указанным способом, либо покажите, что это сделать невозможно.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 &= (y-z)^2 - 3, \\ y^2 &= (x-z)^2 - 9, \\ z^2 &= (x-y)^2 + 27. \end{aligned}$$

Для каждого решения (x_k, y_k, z_k) найдите длину отрезка AM_k, где точки A и M_k имеют координаты $(1, 2, 3)$ и (x_k, y_k, z_k).

3. В множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ добавили одно число X, такое что $n+1 \leq X \leq 2n$. Среднее арифметическое этих $(n+1)$ чисел составило $130/11$. Найдите n и X.

4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM являются вершинами некоторого квадрата. Какую часть площади квадрата $ABCD$ занимает этот квадрат?

5. Найдите все пары коэффициентов (p, q) функций $f(x) = 4^x + p2^x + q$, удовлетворяющих условию: если оба коэффициента p, q увеличить на 1 (одновременно), то получится функция, не имеющие действительных корней.

Изобразите все пары коэффициентов на координатной плоскости (p, q).

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 13111 для 11 класса

1. Даны 2018 чисел, определяемых формулой $x_k = \sin\frac{k}{k+2}$. Докажите, что

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018})^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{2018}^2).$$

2. Снежная королева собирается предложить пленнику свободу, если он нарисует такой 1001-угольник, все стороны которого может пересечь одна единственная прямая, не проходящая через его вершины. Каковы шансы пленника? Либо нарисуйте такие 1001-угольник и прямую, либо обоснуйте, что это сделать невозможно.

3. Агрокомбинат "Полярные витамины" имеет 11 теплиц, в которых к новому году выращены ананасы. Известно, что во всех теплицах кроме первой выращено суммарно 100 ананасов, во всех, кроме второй – 110, во всех кроме третьей – 110 ананасов и так далее, во всех теплицах кроме последней (одиннадцатой) выращено 110 ананасов. Сколько ананасов выращено в каждой теплице?

4. Тридцать три тролля строят свои хижины на краю прямолинейного обрыва (оттуда удобнее смотреть за границу на Деда Мороза). Если занумеровать их по порядку, то расстояние между хижинами с номером k и с номером $k + 1$ равно $k^2 - k + 1$ метров. Где троллям следует установить подзорную трубу, чтобы сумма расстояний от каждой хижины до трубы была бы наименьшей?

5. Перед праздником все снегурочки собрались на предновогодний инструктаж. Оказалось, что снегурочек с длинной косой, которые не носят очки, меньше, чем снегурочек в очках, но без длинной косы. Каких снегурочек на инструктаже было больше: с длинной косой или в очках?