Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 11101 для 10 класса

1. Выясните, существует ли натуральное число n, для которого найдутся натуральные числа k_1, k_2, k_3, k_4 такие, что

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k_1}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{k_2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{k_3}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{k_4}=(0,1)^n.$$

Если таких чисел n несколько, то найдите показатели k_1, k_2, k_3, k_4 степени для каждого допустимого n.

2. Элементы A, B, C, D, E, F, G, H, I электрической схемы соединены проводниками AB, AD, AH, BC, BE, CD, CF, DI, EH, HI, FG. Робот должен обойти все проводники для поиска обрыва и вернуться в начало своего маршрута (один из элементов A, B,..., I). При этом некоторые проводники, возможно, придется пройти более одного раза. Найдите наименьшее достаточное для выполнения задачи робота количество пройденных им проводников. Есть ли проводники, которые необходимо проходить более одного раза, сколько их и каково количество повторений, какие это проводники?

3. Участок для строительства кафе "Северный бриз" представляет собой криволинейный треугольник. Если провести для удобства координатные оси, то вдоль оси OX он ограничен автодорогой, вдоль оси OY — забором, а по линии $y=(x-a)^2$ проходит берег Ледовитого океана. Здесь $a>1$ — известный параметр. Кафе будет расположено на прямоугольной веранде, один из углов которой лежит на берегу моря, а противоположный совпадает с началом координат. Найдите координаты угла на берегу моря, для которых веранда будет иметь наименьший периметр.

4. Маяк расположен в море на расстоянии 500 м от прямолинейного берега. Вдоль кромки берега расположена стена длиной 40 м. Между маяком и берегом параллельно берегу со скоростью 5 м/с движется теплоход длиной 50 м. Он загораживает всю стену от смотрителя, находящегося на маяке, в течение 4 с. Найдите расстояние от теплохода до берега. (Шириной теплохода можно пренебречь.)

5. При каких целых n число $n^4+2n^3-n^2-10n$ кратно 12?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 12103 для 10 класса

1. В десятичной записи числа M две цифры оказались пропущены. Они обозначены ниже подчеркиваниями.

$$M = 14! - 13! + 12! = 81\,43\_\,27\_\,000.$$

Можно ли восстановить эти цифры, не выполнив ни одного умножения? Либо найдите их указанным способом, либо покажите, что это сделать невозможно.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 &= (y-z)^2 - 8,\\ y^2 &= (x-z)^2 - 16,\\ z^2 &= (x-y)^2 + 32. \end{aligned}$$

Для каждого решения (x_k, y_k, z_k) найдите длину отрезка AM_k, где точки A и M_k имеют координаты $(1, 2, 3)$ и (x_k, y_k, z_k).

3. Из множества $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ удалили одно число X, среднее арифметическое оставшихся чисел составило $76/3$. Найдите n и X.

4. В трапецию можно вписать окружность. Докажите, что касаются друг друга окружности, построенные на боковых сторонах трапеции, как на диаметрах.

5. Выясните, существует ли функция $f(x) = a\cos^2 x + b\sin x$ такая, что при умножении любого из коэффициентов a, b на число k ($k \neq 0$, $k \neq 1$) получаются функции, не принимающие значений из множества $\{b, kb\}$. Ответ обоснуйте.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 13102 для 10 класса

1. Даны 2019 чисел, определяемых формулой $x_k = \dfrac{k}{2k+1}$. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018}}{4}\right)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{2018}^2.$$

2. Снежная королева собирается предложить пленнику свободу, если он нарисует такой 777-угольник, все стороны которого может пересечь одна единственная прямая, не проходящая через его вершины. Каковы шансы пленника? Либо нарисуйте такие 777-угольник и прямую, либо обоснуйте, что это сделать невозможно.

3. Автопарк компании "Куда в машинах снег везут?" имеет 7 снеговозов. При поломке первого или второго из них остальные шесть могут вывезти за совместный рейс 200 т снега. При поломке любого из оставшихся другие шесть могут вывезти за совместный рейс 220 т снега. Какова грузоподъемность каждого снеговоза?

4. Перед резиденцией Деда Мороза вдоль прямолинейной дорожки растет 99 елок, которые нужно нарядить к празднику. Если занумеровать их по порядку, то расстояние между елками с номером k и с номером $k+1$ равно $k(k+1)+10$ метров. Где следует положить ящик с елочными украшениями, чтобы сумма расстояний от ящика до каждой елки была бы наименьшей?

5. На предновогодний парад прибыли снеговики двух видов: снеговики с морковкой и снеговики с редиской. При этом некоторые из них (и тех, и других) были с ведерками на голове. Оказалось, что снеговиков в ведерке и с морковкой больше, чем снеговиков без ведерка и с редиской. Каких снеговиков больше: с ведерком или с редиской?