ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1.

Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый гловастик саблезубой лягушки, если все пятиногие гловастики имеют один хвост, а все многохвостые – четыре ноги?

Решение.

Обозначим через x количество хвостов у гловастика саблезубой лягушки. Пусть было поймано n пятиногих и k многохвостых головастиков. Подсчет общего количества ног и хвостов дает уравнения

$$\begin{cases} 5n + 4k = 100, \\ n + xk = 64. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $n \le 100/5 = 20$, $k \le 100/4 = 25$.

Кроме того, $4k = 5(20 - n)$, следовательно, k кратно 5.

Умножим теперь второе уравнение системы на 5 и вычтем из результата первое. Получим

$$(5x - 4)k = 64 \cdot 5 - 100 = 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Поскольку слева стоит произведение двух натуральных чисел и с учетом полученных ограниченый, находим, что k может принимать только значения

$$k = 5 \qquad \text{или} \qquad k = 10 \qquad \text{или} \qquad k = 20.$$

Подставим их по очереди в систему уравнений. При $k = 5$ имеем

$$\begin{cases} 5n + 20 = 100, \\ n + 5x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 16$. Но $64 - 16 = 48$ не кратно 5. Решений нет.

При $k = 10$ получаем

$$\begin{cases} 5n + 40 = 100, \\ n + 10x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 12$. Но $64 - 12 = 52$ не кратно 10. Решений снова нет.

Наконец, при $k = 20$ находим

$$\begin{cases} 5n + 80 = 100, \\ n + 20x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 4$ и $n = 3$.

Ответ: 3 хвоста.

Задача 2.

Может ли число $n^2 + n + 8$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что легко проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число $n^2 + n$ будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, $n^2 + n + 8$ не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

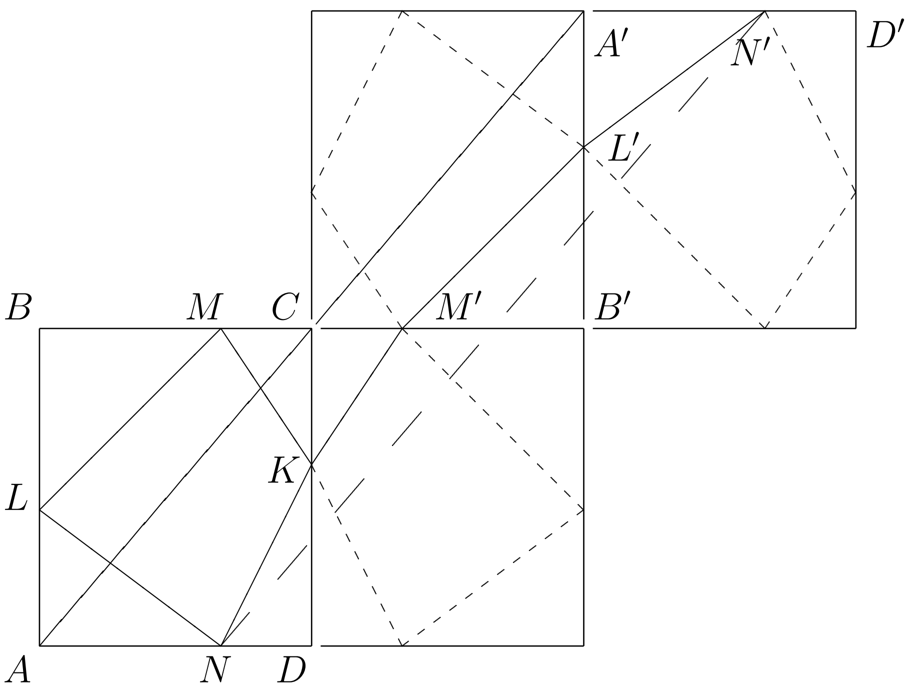
Задача 3.

Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого? Какое минимальное значение может иметь отношение длины большего пути к меньшему?

Решение.

Изобразим прямоугольный карьер $ADCD$ и вписанный в него четырехугольный маршрут второго пловца $NLMK$.

Отразим симметрично чертеж сначала относительно стороны CD, затем относительно стороны CB', наконец, относительно стороны $A'B'$.



По построению отрезки ND и $N'D'$ равны и параллельны друг другу. Следовательно, $AA'N'N$ – параллелограмм, и его сторона NN' равна удвоенной диагонали исходного прямоугольника AC (т.е. длине пути первого пловца).

Ясно, что сумма длин отрезков NK, KM', $M'L'$ и $L'N'$ равна периметру четырехугольника $NLMK$ (т.е. длине пути второго пловца).

Но длина ломаной $NKM'L'N'$ не меньше длины отрезка NN', являющегося кратчайшим расстоянием между точками N и N'. Отсюда следует, что путь второго пловца не может быть меньше (короче) пути первого.

Пути можно сделать равными, если перенести (пользуясь симметрией построения) точки пересечения отрезка NN' со сторонами DC, CB' и $B'A'$ на исходный прямоугольник. (Можно показать, что получившаяся таким образом фигура будет параллелограммом, но это не входит в постановку задачи.)

При таком построении пути пловцов будут равны и их отношение будет равно 1.

Заметим, что в рассуждениях нигде не использовано то, в какой пропорции исходная точка N делит соответствующую сторону прямоугольника AD.

Ответ:

путь второго пловца не может быть короче, чем у первого;
минимальное отношение длины большего пути к меньшему равно 1.

Задача 4.

В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» – заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» – ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек? (Не забудьте указать единицы измерения.)

Решение.

Пусть Пончик имеет x кг варенья, а Сиропчик – в n раз больше, т.е. nx кг. Тогда прожорливость Пончика равна $\frac{nx}{45}$, а прожорливость Сиропчика $\frac{x}{20}$. Тогда равенство время поедания запасов дает уравнение

$$\frac{x}{nx/45} = \frac{nx}{x/20},$$

откуда

$$n^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

следовательно, $n = \frac{3}{2}$.

Из уравнения

$$x + \frac{3}{2} \cdot x = 100$$

находим $x = 40$. Таким образом, у Пончика было припасено 40 кг варенья, а у Сиропчика – 60 кг.

Их прожорливость равна соответственно $\frac{60}{45} = \frac{4}{3}$ кг/день и $\frac{40}{20} = 2$ кг/день.

Ответ:

Пончик: 40 кг варенья, $\frac{4}{3}$ кг/день;

Сиропчик: 60 кг варенья, и 2 кг/день.

Задача 5.

Имеет ли уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2} = 1$$

решение в натуральных числах, больших единицы?

Решение.

Пусть целое $x = n \geq 2$ является решением, обозначим выражение в левой части уравнения как $S(n)$. В левой части при этом ровно $n^2 - n + 1$ слагаемых.

Каждое слагаемое кроме первого заменим меньшим его положительным числом $1/n^2$. Тогда

$$S(n) > \frac{1}{n} + (n^2 - n)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = 1.$$

Равенство невозможно.

Ответ: решений не имеет.