ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1.

Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый гловастик саблезубой лягушки, если все пятиногие гловастики имеют один хвост, а все многохвостые – четыре ноги?

Решение.

Обозначим через x количество хвостов у гловастика саблезубой лягушки. Пусть было поймано n пятиногих и k многохвостых головастиков. Подсчет общего количества ног и хвостов дает уравнения

$$\begin{cases} 5n + 4k = 100, \\ n + xk = 64. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $n \leq 100/5 = 20, \qquad k \leq 100/4 = 25.$

Кроме того, $4k = 5(20 - n)$, следовательно, k кратно 5.

Умножим теперь второе уравнение системы на 5 и вычтем из результата первое. Получим

$$(5x - 4)k = 64 \cdot 5 - 100 = 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Поскольку слева стоит произведение двух натуральных чисел и с учетом полученных ограниченый, находим, что k может принимать только значения

$$k = 5 \qquad \text{или} \qquad k = 10 \qquad \text{или} \qquad k = 20.$$

Подставим их по очереди в систему уравнений. При $k = 5$ имеем

$$\begin{cases} 5n + 20 = 100, \\ n + 5x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 16$. Но $64 - 16 = 48$ не кратно 5. Решений нет.

При $k = 10$ получаем

$$\begin{cases} 5n + 40 = 100, \\ n + 10x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 12$. Но $64 - 12 = 52$ не кратно 10. Решений снова нет.

Наконец, при $k = 20$ находим

$$\begin{cases} 5n + 80 = 100, \\ n + 20x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 4$ и $n = 3$.

Ответ: 3 хвоста.

Задача 2.

Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что легко проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число $n^2 + n$ будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, $n^2 + n + 2$ не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

Задача 3.

Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник 9×11 см и отметил в нем двести точек – мест под заклепки. Шпунтик разлиновал прямоугольник на квадратные отсеки со стороной 1 см. При этом ни одна пометка Винтика не попала на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек, на который приходится три или более заклепки.

Решение.

Ясно, что Шпунтик разбил исходный прямоугольник на $9 \times 11 = 99$ квадратов.

Если в каждом квадрате будет менее трех отверстий, то всего отверстий будет менее 198, что противоречит условию.

Задача 4.

В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

Решение.

Пусть в Android-отделе работает n, а в iOS-отделе m человек. Вычислим общее количество сообщений двумя способами.

Было отправлено $7n + 15m$ сообщений.

Было принято $15n + 9m$ сообщений.

Тогда

$$7n + 15m = 15n + 9m,$$

откуда

$$6m = 8n.$$

Поскольку слева первый множитель меньше, то второй должен быть больше. Следовательно, $m > n$.

Ответ: в iOS-отделе больше человек.

Задача 5.

Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

Решение.

Обозначим через A вес первой части (той, что осталась на весах), через B вес второй части (той, что была отсыпана), через d ошибку весов.

Тогда результат первого взвешивания (всего порошка) дает

$$A + B + d = 6,$$

результат второго взвешивания (после отсыпания) дает

$$A + d = 3$$

и результат последнего взвешивания (отсыпанной части) дает

$$B + d = 2.$$

Складывая два последних равенства, получаем, что

$$A + B + 2d = 5.$$

Вычитая из полученного самое первое равенство, получаем

$$d = -1.$$

Таким образом, весы уменьшают все показания на 1 золотник. Отсюда сразу следует ответ.

Ответ: 4 и 3 золотника.