ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса.

Задача 1.

На факультете ядерного дирижаблестроения подсчитали, что в процентном отношении мальчиков на первом курсе больше, чем мальчиков на всем факультете. Кого (в процентном отношении) больше – первокурсников среди всех мальчиков факультета или всех студентов первого курса среди всех студентов факультета?

Решение.

Введем обозначения:
m – количество мальчиков на 1 курсе,
M – количество всех мальчиков на факультете,
k – количество студентов на 1 курсе,
K – количество студентов на всем факультете.

Согласно условию,

$$\frac{m}{k} > \frac{M}{K}.$$

Требуется сравнить

$$\frac{m}{M} \text{ и } \frac{k}{K}.$$

Из условия по свойству пропорции получаем, что левая дробь больше.

Ответ: доля первокурсников среди всех мальчиков факультета больше, чем доля всех студентов первого курса среди всех студентов факультета

Задача 2.

Решите уравнение

$$x^2 - [x] = 2019,$$

в котором $[x]$ означает целую часть числа x.

Решение.

Если представить произвольное число x в виде $x = m + \alpha$, где m – целое, $\alpha \in (0,1)$, то $[x] = m = x - \alpha$. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - x + \alpha = 2019.$$

Поскольку $\alpha \in (0,1)$, то

$$2018 \le x^2 - x \le 2019.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x$. Это парабола с корнями 0 и 1 и с ветвями, направленными вверх.

Поэтому полученное двойное неравенство может выполняться на некотором отрезке, расположеном левее точки $x = 0$ и на некотором другом отрезке, расположеном правее точки $x = 1$. Рассмотрим их по очереди.

Пусть $x < 0$. Легко вычислить (устно), что

$$f(-45) = (-45)^2 + 45 = 2025 + 45 > 2019,$$
$$f(-44) = (-44)(-45) = 45^2 - 45 < 2018.$$

Следовательно, искомые $x \in (-45, -44)$. В этом случае $[x] = -45$ и исходное уравнение принимает вид

$$x^2 - (-45) = 2019.$$

Его решением (отрицательным) является $x_1 = -\sqrt{1974}$.

При $x > 1$ аналогично вычисляем (также устно)

$$f(45) = (45)^2 - 45 = 2025 - 45 < 2018,$$
$$f(46) = 46 \cdot 45 = 45^2 + 45 > 2019.$$

Следовательно, искомые $x \in (45, 46)$. В этом случае $[x] = 45$ и исходное уравнение принимает вид

$$x^2 - 45 = 2019.$$

Его решением (теперь положительным) является $x_2 = \sqrt{2064}$.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{1974}$, $x_2 = \sqrt{2064}$.

Задача 3.

Транспортная компания «Пианогруз» специализируется на перевозке тяжелых музыкальных инструментов. После того, как в автомашине компании были оборудованы места для грузчиков, остался грузовой отсек в форме квадрата со стороной 3 м. Изобразите в координатах «длина – ширина» множество всех точек, которые могут задавать размеры прямоугольного инструмента, помещающегося в грузовой отсек. Считайте, что оборудование кузова позволяет закрепить инструмент в любом положении, а ограничения по высоте отсутствуют.

Решение.

1. Поскольку наклоненный (поставленный на ребро) инструмент в проекции на дно отсека образует прямоугольник, то достаточно рассмотреть плоскую задачу о прямоугольнике внутри квадрата. Пусть длина инструмента равна l, ширина h. Обозначим длину стороны квадратного кузова a.

Сначала рассмотрим очевидный случай, когда инструмент помещается вдоль (или, что то же, поперек) кузова. В этом случае $l \leq a$, $h \leq a$.

2. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $l > a$.

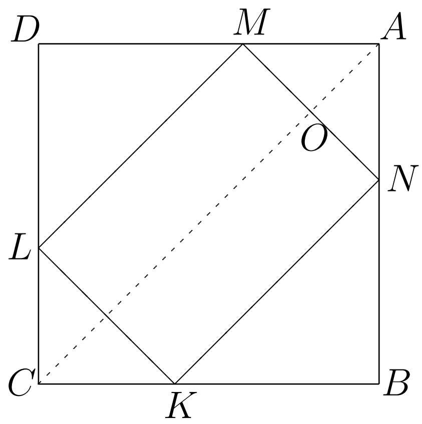


рис. 2а

2a. Пусть длинная сторона инструмента (прямоугольника) $KLMN$ параллельна диагонали квадрата (см. рис. 2а).
Поскольку $\angle MAO = 45°$, а $MN \perp AC$, то $\triangle MAO$ – равнобедренный и $MO = OA$. Из аналогичных рассуждений для $\triangle CLK$ и равенства этих треугольников друг другу следует, что $LM + MN = AC$.
Таким образом, при $KN \parallel AC$ стороны любого вписанного в квадрат прямоугольника должны удовлетворять соотношению

$$l + h = a\sqrt{2}.$$

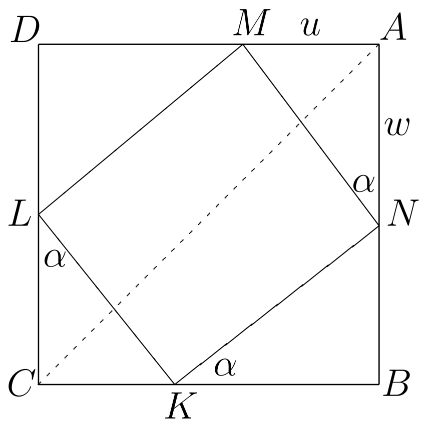


рис. 2б

2b. Пусть теперь стороны прямоугольника $KLMN$ не параллельны диагоналям квадрата (см. рис. 2б).
Пусть $\angle NKB = \alpha$. Тогда $\angle KLC = \angle MNA = \alpha$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Следовательно, прямоугольные треугольники NKB, KLC подобны, а $\triangle KLC = \triangle MNA$ (по гипотенузе и острому углу).

Пусть коэффициент подобия $\triangle NKB$ и $\triangle KLC$ равен k. Если обозначить через u и w стороны MA и AN, то

$$AB = a = w + k\,u,$$
$$CB = a = u + k\,w,$$

откуда
$$(k-1)w = (k-1)u.$$

Если $k \neq 1$, то сокращая, получаем $w = u$, т.е. треугольники MAN и LCK равнобедренные. Если же $k = 1$, то указанные треугольники равнобедренны по построению. Следовательно, стороны LM и KN параллельны диагонали AC.

Таким образом, доказано, что все четыре вершины вписанного в квадрат прямоугольника лежат на сторонах квадрата тогда и только тогда, когда стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

3. Зафиксируем длину стороны l и выясним, какое максимальное значение может принимать ширина h при различных положениях прямоугольника. Для этого будем мысленно вращать его, начиная с положения, параллельного диагонали. На рис 3 отмечено, как будут двигаться его вершины.

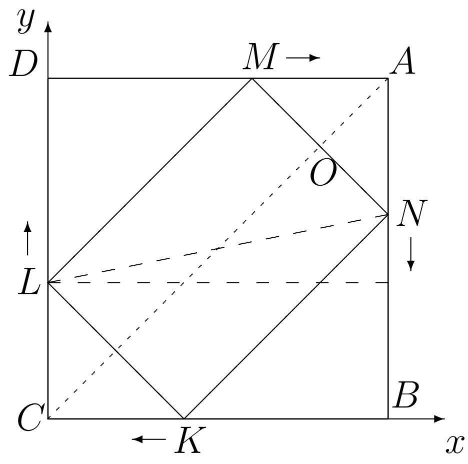


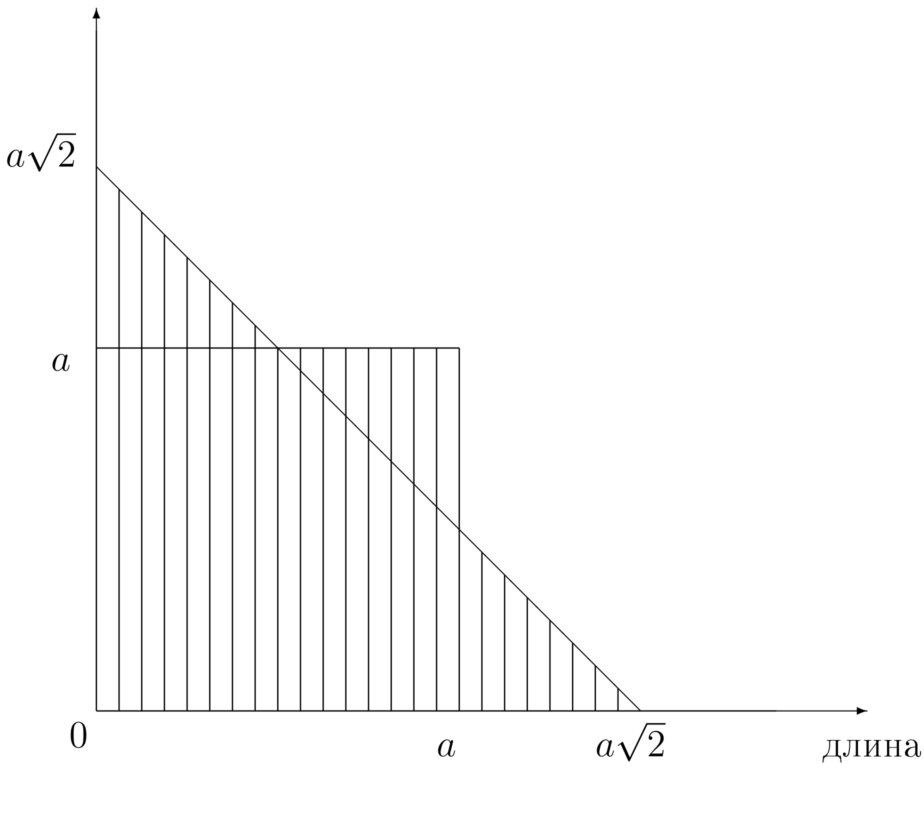
рис. 2а

Введем оси координат Cx, Cy как показано на рисунке. Рассмотрим диагональ LN. Квадрат ее длины можно найти из прямоугольного треугольника (пунктирного), один катет которого равен a, другой равен разности ординат точек L и N, которая при вращении прямоугольника уменьшается.

Таким образом, диагональ LN будет уменьшаться, и, следовательно, будет уменьшаться ширина h. Поэтому максимальная ширина соответствует исходному положению, при котором $l + h = a\sqrt{2}$.

Остается изобразить в координатных осях $l - h$ треугольник, отсекаемый в первой четверти прямой $h \leq a\sqrt{2} - l$, и совместить два полученных множества.

Ответ. Искомое множество точек показано ниже вертикальной штриховкой.



Задача 4.

Четыре бригады разрабатывали открытым способом месторождение угля в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году из-за метеоусловий в течение четырех месяцев работы не велись, а все остальное время на добыче бригады работали поочередно (по одной). Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества добытого угля соответственно равны: в первый год 4:1:2:5 и 10 млн. т.; во второй год 2:3:2:1 и 7 млн.т.; в третий год 5:2:1:4 и 14 млн. т. Сколько угля добыли бы за 4 месяца эти четыре бригады, работая вместе?

Решение. Пусть i-я бригада добывает за месяц x_i угля. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \end{cases}$$

Сложив удвоенное первое уравнение с утроенным вторым и вычтя третье уравнение, получим

$$9(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 27.$$

Тогда

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 12.$$

Ответ: 12 млн.т.

Задача 5.

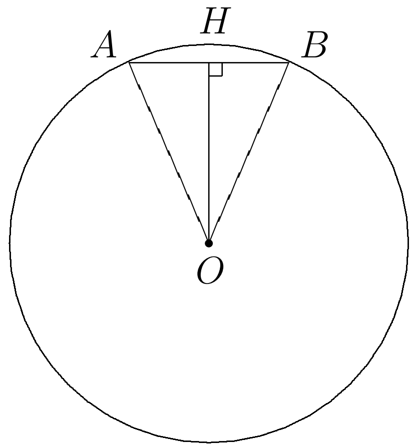
Окружность единичного радиуса поделили на 2^{2019} равных частей. Докажите, что расстояние от центра окружности до хорды, стягивающей одну такую часть, составляет ровно половину от величины

$$\sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{2018\ \text{двоек}}}.$$

Решение.

Изобразим (внемасштабно) $\angle AOB$, составляющий одну 2^{2019}-ю часть окружности. Обозначим его α. Ясно, что

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^{2019}} = \frac{\pi}{2^{2018}}.$$



В условии дана формула для OH. Из прямоугольного треугольника OHB с гипотенузой $OB = 1$ и с острым углом $BOH = \dfrac{\alpha}{2}$ получаем, что

$$OH = OB\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, требуется доказать, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{2019}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{2018\text{ двоек}}}.$$

Обобщим требуемую формулу (домножив предварительно на 2)

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n\text{ двоек}}} \qquad (*)$$

и докажем ее по индукции. Тогда при $n = 2018$ будем иметь требуемое.

База индукции при $n = 1$ очевидна:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \sqrt{2}.$$

Индуктивный переход будет заключаться в том, чтобы доказать, что из верности формулы $(*)$ будет следовать верность формулы

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{(n+1)\text{ двоек}}}.$$

Преобразуем правую часть, используя $(*)$

$$\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{(n+1)\text{ двоек}}} = \sqrt{2+\sqrt{\underbrace{2+\ldots+\sqrt{2}}_{(n)\text{ двоек}}}} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

Обозначим $\beta = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Теперь остается доказать соотношение

$$2\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{2+2\cos\beta}$$

для угла $\beta \in (0, \pi/2)$. Возводя обе стороны равенства в квадрат и деля на 2, получаем известную формулу косинуса половинного угла

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{2}.$$

Индуктивный переход доказан. Следовательно, формула $(*)$ верна при любом $n \geq 1$. Остается положить $n = 2018$.