ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1.

На факультете ядерного дирижаблестроения подсчитали, что в процентном отношении мальчиков на первом курсе больше, чем мальчиков на всем факультете. Кого (в процентном отношении) больше – первокурсников среди всех мальчиков факультета или всех студентов первого курса среди всех студентов факультета?

Решение.

Введем обозначения:
m – количество мальчиков на 1 курсе,
M – количество всех мальчиков на факультете,
k – количество студентов на 1 курсе,
K – количество студентов на всем факультете.

Согласно условию,

$$\frac{m}{k} > \frac{M}{K}.$$

Требуется сравнить

$$\frac{m}{M} \text{ и } \frac{k}{K}.$$

Из условия по свойству пропорции получаем, что левая дробь больше.

Ответ: доля первокурсников среди всех мальчиков факультета больше, чем доля всех студентов первого курса среди всех студентов факультета

Задача 2.

Может ли число n^2+n+17 делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что легко проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число $n^2 + n$ будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, $n^2 + n + 17$ не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

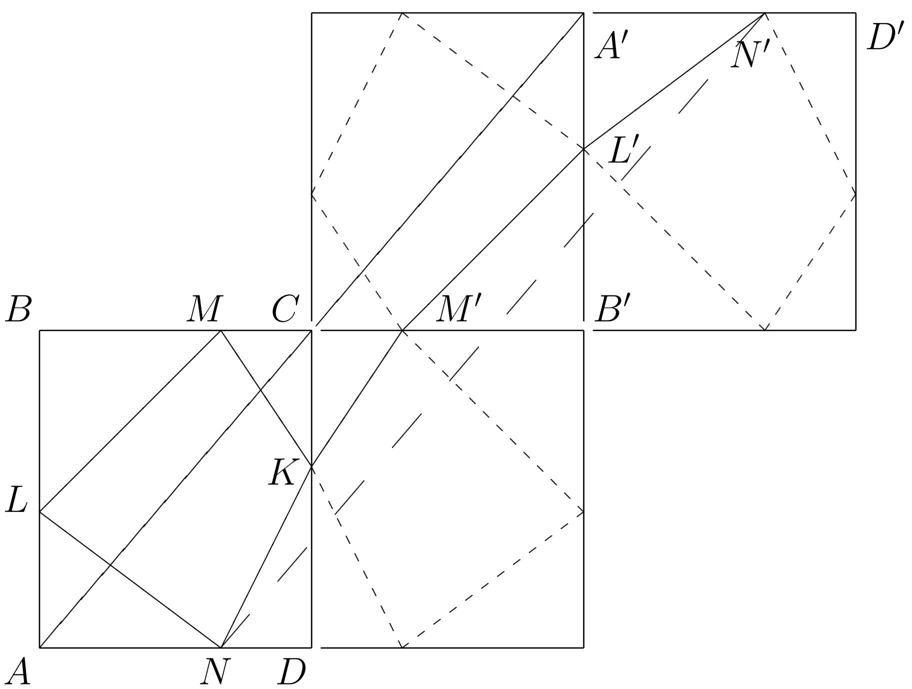
Задача 3.

Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого? Какое минимальное значение может иметь отношение длины большего пути к меньшему?

Решение.

Изобразим прямоугольный карьер $ADCD$ и вписанный в него четырехугольный маршрут второго пловца $NLMK$.

Отразим симметрично чертеж сначала относительно стороны CD, затем относительно стороны CB', наконец, относительно стороны $A'B'$.



По построению отрезки ND и $N'D'$ равны и параллельны друг другу. Следовательно, $AA'N'N$ – параллелограмм, и его сторона NN' равна удвоенной диагонали исходного прямоугольника AC (т.е. длине пути первого пловца).

Ясно, что сумма длин отрезков NK, KM', $M'L'$ и $L'N'$ равна периметру четырехугольника $NLMK$ (т.е. длине пути второго пловца).

Но длина ломаной $NKM'L'N'$ не меньше длины отрезка NN', являющегося кратчайшим расстоянием между точками N и N'. Отсюда следует, что путь второго пловца не может быть меньше (короче) пути первого.

Пути можно сделать равными, если перенести (пользуясь симметрией построения) точки пересечения отрезка NN' со сторонами DC, CB' и $B'A'$ на исходный прямоугольник. (Можно показать, что получившаяся таким образом фигура будет параллелограммом, но это не входит в постановку задачи.)

При таком построении пути пловцов будут равны и их отношение будет равно 1.

Заметим, что в рассуждениях нигде не использовано то, в какой пропорции исходная точка N делит соответствующую сторону прямоугольника AD.

Ответ:
путь второго пловца не может быть короче, чем у первого;
минимальное отношение длины большего пути к меньшему равно 1.

Задача 4.

В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» – заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» – ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек?

Решение.

Пусть Пончик имеет x кг варенья, а Сиропчик – в n раз больше, т.е. nx кг. Тогда прожорливость Пончика равна $\dfrac{nx}{45}$, а прожорливость Сиропчика $\dfrac{x}{20}$. Тогда равенство время поедания запасов дает уравнение

$$\frac{x}{nx/45} = \frac{nx}{x/20},$$

откуда

$$n^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

следовательно, $n = \dfrac{3}{2}$.

Из уравнения

$$x + \frac{3}{2} \cdot x = 100$$

находим $x = 40$. Таким образом, у Пончика было припасено 40 кг варенья, а у Сиропчика – 60 кг.

Их прожорливость равна соответственно $\dfrac{60}{45} = \dfrac{4}{3}$ кг/день и $\dfrac{40}{20} = 2$ кг/день.

Ответ:
Пончик: 40 кг варенья, $\dfrac{4}{3}$ кг/день;
Сиропчик: 60 кг варенья, и 2 кг/день.

Задача 5.
Верно ли неравенство

$$\sqrt{\underbrace{2019 + \sqrt{2019 + \ldots + \sqrt{2019}}}_{2019 \text{ раз}}} < 2019 \ ?$$

Решение.
Рассмотрим величину

$$x_n = \sqrt{\underbrace{2019 + \sqrt{2019 + \ldots + \sqrt{2019}}}_{n \text{ раз}}}$$

Ясно, что $x_n > 0$. Возводя неравенство $x_n < 2019$ в квадрат, получаем

$$x_n^2 = 2019 + x_{n-1} < 2019^2$$

или, что то же

$$x_{n-1} < 2019^2 - 2019.$$

Несложно проверить, что $2019 < 2019^2 - 2019$. Поэтому из неравенства $x_{n-1} < 2019$ следует неравенство $x_n < 2019$ для любого номера n.

Остается проверить, что $x_1 = \sqrt{2019} < 2019$. Это неравенство верно. Теперь переходя от неравенства для x_1 к неравенству для x_2 и так далее, получаем, что неравенство для x_{2019} будет верным.