Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11113 для 11 класса

1. За год цены на энергоносители изменились по закону

$$y(a,x) = ax^3 + 3ax,$$

где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый энергопроизводителем. Могут ли при этом все цены, находившиеся в интервале $(33, 99)$, остаться в нём же?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_2^3 + 1, \ 3x_2 = 2x_3^3 + 1, \\ 3x_3 = 2x_4^3 + 1, \ 3x_4 = 2x_1^3 + 1. \end{cases}$$

3. Боковая грань пирамиды представляет собой треугольник ABC. Две его стороны имеют длины b и $b+2$, медиана к третьей стороне имеет длину $b-1$. Найдите площадь треугольника ABC и выясните, может ли его угол, образованный наиболее длинными сторонами, быть равным 45°.

4. Целой частью $\lfloor x \rfloor$ числа x называется наибольшее целое число m такое, что $m \le x$, например, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -0.9 \rfloor = -1$. Решите уравнение:

$$\lfloor \sqrt{x/2+3} \rfloor = \sqrt{\lfloor x/2+3 \rfloor}.$$

5. Решите в целых числах следующее уравнение:

$$-20x + 17y = 2017.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12111 для 11 класса

1. В некоторой области для обеспечения электричеством удаленных районов работают гидрогенераторы двух типов, суммарной мощностью 7000 кВт. Если бы все генераторы были первого типа, то суммарная мощность была бы на 1000 кВт больше. Если бы все генераторы были второго типа, то суммарная мощность была бы на 3000 кВт меньше. Какова суммарная мощность генераторов первого типа и какова суммарная мощность генераторов второго типа?

2. Что больше: $\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{2017}\right)$ или $\cos\left(\sin\dfrac{\pi}{2017}\right)$?

3. Сумма квадратов корней функции $f(x) = x^2 + bx + c$ равна 5, а расстояние между корнями равно 3. Найдите минимальное значение m функции $f(x)$ и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 9^m, \\ 3^{x-y} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{f(0)}. \end{cases}$$

4. Под куполом цирка n артистов идут с одинаковыми постоянными скоростями по канату. Навстречу им с такими же скоростями движутся еще n канатоходцев. При встрече лицом к лицу любых двух канатоходцев они пожимают друг другу руки, разворачиваются и движутся в противоположные стороны с прежней скоростью. Дойдя до какого-либо конца каната, артист покидает его и спускается. Может ли число всех рукопожатий на канате быть равным $n^3/2 - 1$?

5. Над плоским прямоугольным чемоданом с соотношением сторон $2:3$ проезжает прямоугольная рамка интровизора, которая имеет ширину H и достаточно большую длину (можно считать ее бесконечной). Взаимное положение чемодана и рамки таково, что продольная ось рамки всегда остается параллельной диагонали чемодана. При каком расстоянии между осью рамки и параллельной ей диагональю чемодана площадь, покрываемая рамкой, будет максимальна?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13111 для 11 класса

1. Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление $E_1(\rho,t)=\sqrt{t^2-\rho+1}$, $E_2(\rho,t)=\sqrt{3t^2+2\rho-3}$, $E_3(\rho,t)=\sqrt{4t^2+\rho+1}$ зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

2. Число $1/7$ разложили в бесконечную десятичную дробь. В ней 2018-ю цифру после запятой повторили еще раз. Получили число x. Сравните $(1/7)^x$ и $(1/7)^{1/7}$.

3. Вершины усеченной треугольной пирамиды требуется раскрасить так, что концы любого ребра имеют разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколькими способами можно получить такую раскраску с минимальным числом цветов?

4. В две пустые емкости начали в разное время одинаковыми насосами закачивать горючее. В настоящий момент в первой емкости горючего в два раза больше, чем было во второй емкости в момент t_0. В тот же момент t_0 в первой было столько же горючего, сколько во второй в настоящий момент. В обеих емкостях вместе в настоящий момент 49 тонн горючего. Сколько горючего в каждой емкости в настоящий момент и в момент t_0?

Если все горючее в обеих емкостях в настоящий момент перелить в цилиндр, а все горючее в обеих емкостях в момент t_0 перелить в другой цилиндр с тем же основанием, то каково будет отношение уровней горючего в этих цилинрах?

5. Орнаментом в декоративно-прикладном искусстве принято называть повторяющееся изображение одного и того же рисунка. Орнамент на плоской поверхности (на стене, потолке, полу здания или помещения, на ткани, бумаге и пр.) часто образует "замощение" плоскости одинаковыми геометрическими фигурами. Можно ли "замостить" плоскость одинаковыми правильными 5-угольниками так, что любые два соседних 5-угольника имеют ровно одну общую сторону?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 14111 для 11 класса

1. Через точку $O(0;0)$ проведены прямые, касающиеся параболы

$$y = (x-4)(x-9)$$

в точках A и B. Коробка для новогодних подарков имеет вид пирамиды с треугольником AOB в основании и высотой 1. Найдите угол AOB и объем коробки.

2. Решите уравнение

$$3^{x^3}(1-(3^x-\sqrt{3})^{13}) = 3^{x^3}+3^x-\sqrt{3}.$$

3. Многочлен $f(x) = x^2+px+q$ имеет корни $f(0)$ и $f(1)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$ и решите неравенство

$$(0,01)^{f(x)} < 10.$$

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что

$$\sin n^\circ = \sin 2017n^\circ.$$

5. В выпуклом 2017-угольнике $A_1A_2\ldots A_{2017}$ (не обязательно правильном) две стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), ... , $A_{2016}A_{2017}$ и A_1A_2 (получили точку B_{2017}), $A_{2017}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге получилась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\ldots B_{2017}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{2017}$ этой "звёздочки".