ЗАДАЧА 2 (ДЛЯ 11 КЛАССА). За год цены на энергоносители изменились по закону $y = 2ax^3 + ax^2$, где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый производителем. Могут ли при этом все цены из интервала $(100; 200)$ остаться в нем же?

РЕШЕНИЕ. Положим $y = y(x) = 2ax^3 + ax^2$, $b = 100$, $c = 200$.

Если $a \leq 0$, то $y \leq 0$, не попадает в интервал $(b; c)$.

Пусть $a > 0$. Тогда функция $y(x)$ возрастает, поэтому $y(b) < y(x) < y(c)$. Для попадания y в интервал $(b; c)$ необходимо и достаточно, чтобы для всех x из $(b; c)$ выполнялись нер-ва $y(b) \geq b, \quad y(c) \leq c.$ Преобразуем их:

$$2ab^3 + ab^2 \geq b,\ 2ac^3 + ac^2 \leq c \qquad \Leftrightarrow \qquad ab^2 + ab \geq 1,\ 2ac^2 + ac \leq 1 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2b^2 + b} \leq a \leq \frac{1}{2c^2 + c},$$

что невозможно, так как $b < c$.

ОТВЕТ: не могут.

ЗАДАЧА 3 (ДЛЯ 11 КЛАССА).

Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление

$$E_1 = \sqrt{\rho^2 + 2t^2 - 5}, \quad E_2 = \sqrt{3\rho^2 + 2t^2 - 6}, \quad E_3 = 2\sqrt{\rho^2 + t^2 + 1}$$

зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

РЕШЕНИЕ. Обозначим подкоренные выражения в E_1 и E_2 через a и b. Тогда $E_3 = \sqrt{a + b + 15}$, а суммарное энергопотребление

$$E(a, b) = E_1 + E_2 + E_3 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a + b + 15}.$$

Все три слагаемых неотрицательны и возрастают с ростом a и b, поэтому минимальное значение функция $E(a, b)$ принимает при $a = b = 0$, оно равно $\sqrt{15}$. Остается решить систему уравнений $a(\rho, t) = b(\rho, t) = 0$ относительно ρ и t. При этом учтем, что $\rho > 0$ (это плотность).

ОТВЕТ. $\sqrt{15}$ при $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \pm\dfrac{3}{2}$.

ЗАДАЧА 9 (ДЛЯ 11 КЛАССА). Найдите наименьшее натуральное n такое, что

$$\sin(2n^\circ) = \sin(2017n^\circ).$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\sin x = \sin y \ \Leftrightarrow\ (x = y + 360^\circ k \ \text{ или } \ x = 180^\circ - y + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x - y = 360^\circ k \ \text{ или } \ x + y = 180^\circ(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}).$$

Если $x = 2017n^\circ$, $y = 2n^\circ$, то $x - y = 2015n^\circ$, $x + y = 2019n^\circ$, поэтому получаем совокупность уравнений в натуральных числах

$$\left[\begin{array}{lcl} 2015n & = & 360k, \\ 2019n & = & 180(2k+1). \end{array}\right.$$

Сократив первое на 5, второе — на 3, получим

$$\left[\begin{array}{lcll} 403n & = & 72k, & \qquad (1) \\ 673n & = & 60(2k+1). & \qquad (2) \end{array}\right.$$

Числа 403 и 72 взаимно простые, поэтому из (1) находим $n = 72$. Далее, числа 673 и 60 также взаимно простые и из (2) находим $n = 60$. Выбирая минимум из 72 и 60, получаем

ОТВЕТ: $n = 60$.

ЗАДАЧА 11 (ДЛЯ 11 КЛАССА). Многочлен

$$f(x) = x^2 + px + q$$

имеет корни $f(0)$ и $f(1)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$ и решите неравенство $(0,1)^{f(x)} < 10$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $x_1 = f(0) = q$ и $x_2 = f(1) = 1 + p + q$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x_1 = x_2$. Тогда $q = 1 + p + q$, откуда $p = -1$. Значит, $f(x_1) = f(q) = q^2 - q + q = 0$, т. е. $q = 0$. В этом случае $f(x) = x^2 - x$.

Второй случай: $x_1 \neq x_2$. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = 1 + p + 2q = -p$, откуда $p = -(q + \frac{1}{2})$. Поскольку $f(x_1) = f(q) = q^2 + pq + q = q^2 - q(q + \frac{1}{2}) + q = 0$, то $q = 0$ и $p = -\frac{1}{2}$. В этом случае $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$.

Неравенство эквивалентно следующему $10^{-f(x)} < 10$, откуда $f(x) > -1$. Это верно для любых x в обоих случаях.

ОТВЕТ: $f(x) = x^2 - x$ или $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$; $x \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 12 (ДЛЯ 9 КЛАССА). Зимний дворец (четвертый) в Петербурге возведен Франческо Бартоломео Растрелли в 1754–1762 гг. для императрицы Елизаветы Петровны. Окон в нем на 1828 больше, чем лестниц, а комнат и лестниц вместе 1617. Если число лестниц увеличить в 10 раз, то результат будет на 775 меньше числа окон. Найдите количество комнат, окон и лестниц.

РЕШЕНИЕ. Пусть x, y, z — число окон, комнат и лестниц соответственно. Тогда условия задачи описываются уравнениями

$$x - z = 1828, \ (1) \qquad y + z = 1617, \ (2) \qquad x - 10z = 775. \ (3)$$

Вычитая (3) из (1), получим уравнение с одним неизвестным $9z = 1053$. Из него находим $z = 117$. Тогда из (1) получаем $x = 1828 + z = 1945$ и из (2) находим $y = 1617 - z = 1500$.

ОТВЕТ: 1500 комнат, 1945 окон, 117 лестниц.

ЗАДАЧА 20 (ДЛЯ 11 КЛАССА). Опишите множество всех точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих условиям

$$[2x - 3y] = 2[x] - 3[y], \qquad [2x + 3y] = 2[x] + 3[y],$$

где $[z]$ означает целую часть действительного числа z.

РЕШЕНИЕ. Представим числа x, y в виде $x = M + x_0$, $y = N + y_0$, где $M = [x]$, $N = [y]$ — их целые, x_0, y_0 — дробные части, $x_0, y_0 \in [0; 1)$. Справедливы соотношения

$$[2x \pm 3y] = [2(M + x_0) \pm 3(N + y_0)] = (2M \pm 3N) + [2x_0 \pm 3y_0],$$

$$2[x] \pm 3[y] = 2[M + x_0] \pm 3[N + y_0] =$$
$$= (2M \pm 3N) + (2[x_0] \pm 3[y_0]) = (2M \pm 3N) + (2x_0 \pm 3y_0),$$

поэтому исходные уравнения сводятся к уравнениям $[2x_0 \pm 3y_0] = 2x_0 \pm 3y_0$, эквивалентным условиям $2x_0 \pm 3y_0 \in [0; 1)$. Таким образом, имеем систему неравенств для x_0, y_0:

$$0 \le x_0 < 1, \quad 0 \le y_0 < 1, \quad 0 \le 2x_0 \pm 3y_0 < 1.$$

Преобразуем неравенства:

$$\frac{2x_0 - 1}{3} \le y_0 < \frac{1 - 2x_0}{3}, \qquad y_0 \le \frac{2x_0}{3}, \qquad x_0 < \frac{1}{2}.$$

Область на плоскости (x_0, y_0) ограничена прямыми и представляет собой треугольник OAB с вершинами $O(0; 0)$, $A(1/2; 0)$, $B(1/4; 1/6)$ без стороны AB.

Тогда на плоскости (x, y) область представляет собой объединение всех таких треугольников, вырезанных из единичных квадратов с целочисленными координатами вершин. Точнее, область является объединением треугольников $O_{MN}A_{MN}B_{MN}$, $O_{MN}(M; N)$, $A_{MN}(M + 1/2; N)$, $B_{MN}(M + 1/4, N + 1/6)$ без стороны $A_{MN}B_{MN}$, определенных для каждой пары целых чисел (M, N).

ОТВЕТ: объединение треугольников $O_{MN}A_{MN}B_{MN}$ с вершинами $O_{MN}(M; N)$, $A_{MN}(M{+}1/2; N)$, $B_{MN}(M{+}1/4; N{+}1/6)$ без стороны $A_{MN}B_{MN}$, определенных для каждой пары целых чисел (M, N).