Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11994 для 9 класса

1. Опишите все выпуклые n-угольники, углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ которых удовлетворяют соотношению

$$\sin^n \alpha_1 + \sin^{n-1} \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n - n = 0.$$

2. Можно ли представить дробь $\dfrac{4}{4n+3}$, где $n \in \mathbb{N}$, суммой двух различных дробей с числителями 1 и натуральными знаменателями?

3. Найдите наибольшее значение выражения $x + 6y$, если переменные x, y удовлетворяют неравенству $3x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 3$.

4. Углы α, β, γ треугольника удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{\beta} - \frac{3}{\gamma}\right) = \frac{2}{\beta}\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{3}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\beta}\right).$$

Найдите отношение радиуса описанной окружности к длине наибольшей стороны для всех таких треугольников.

5. Для функции $f(x) = 2 - \sqrt{3x}$ решите уравнение $f(x) = f(f(x))$.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12992 для 9 класса

1. В прошлом году в одной из школ в олимпиаде «Надежда Энергетики» по математике участвовало 70 учащихся, по физике – 60, по информатике – 50. Организаторы сформировали три списка: учащихся, которые писали олимпиаду по ровно одному предмету, по ровно двум и ровно трём. Во всех списках оказалось одинаковое число учащихся. Сколько учеников в каждом списке?

2. Решая задачу, в которой требуется найти высоту трапеции, ученик выяснил, что трапеция прямоугольная, и нашел длину малой диагонали. Ему удалось узнать, что другой ученик, решая ту же задачу, получил также прямой угол и то же самое значение малой диагонали. Окажутся ли высоты трапеций у этих учеников одинаковыми?

3. Пусть $X = \overline{abcd}$ — целое четырехзначное десятичное число, записанное цифрами a, b, c, d такими, что $a > b > c > d > 0$, Y — число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Может ли число $X - Y$ иметь сумму цифр 20?

4. Найдите все значения a, b, при которых равенство

$$(a + bx)^2 = a^2 - (b/x)^2$$

не выполняется хотя бы в одной точке $x \neq 0$.

5. На кафедре математики три профессора. Их суммарный стаж работы на текущий момент составляет 50 лет, а 10 лет назад он выражался целым числом, кратным 11. Стаж двух наиболее опытных профессоров отличается на 2 года. Найдите стаж каждого из троих в следующем году.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13994 для 9 класса

1. Сколько различных 4-значных чисел, кратных 30, можно образовать из цифр числа 2016, если цифры могут повторяться без ограничений?

2. Электронные часы отстают, хотя и показывают на табло в данный момент на 4 минуты больше, чем следует. Если бы они показывали на 6 минут больше, чем следует, но отставали бы на минуту в сутки больше, чем сейчас, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки отстают часы?

3. Выясните, разрешимо ли уравнение

$$16x^{20} - 20x^{24} + 24x^{28} - 28x^{30} + \cdots + 2016x^{2020} = 0.$$

Если оно разрешимо, найдите сумму S всех его корней и вычислите $\sqrt[5]{S^4}$.

4. Числа x и y образуют *золотое сечение*, если они связаны соотношениями

$$0 < x < y, \qquad \frac{x}{y} = \frac{x+y}{y}.$$

В прямоугольнике длины сторон, а также площадь и длина диагонали образуют золотые сечения. Найдите длины сторон.

5. Известно, что $a(b-c) \neq 0$ и $b^2(ac+1) = c^2(ab+1) = 4$. Найдите числовое значение выражения $(b+c)/a$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 14994 для 9 класса

1. Двухтарифный счетчик электроэнергии ведет раздельный учет затрат в "ночное" и "дневное" время, при этом "ночной" тариф составляет 75% "дневного". Если "ночной" тариф понизится на 20% (при неизменном "дневном"), то какой процент "ночного" расхода электроэнергии следует перенести на "дневное" время, чтобы суммарная суточная стоимость осталась без изменений?

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$(2x-y)^{-1} = 2 \cdot x^{-1} - y^{-1}.$$

3. Выпуклый четырехугольник имеет площадь 9 см^2, сумма квадратов длин его сторон равна 36 см^2. Найдите периметр такой фигуры.

4. В шахматном кружке занимаются мальчики и девочки. Их разбили на группы по 5 человек в каждой. В каждой группе прошел круговой турнир, каждый сыграл по одной партии с каждым из остальных членов той же группы, других игр не было. Может ли при этом число партий между участниками одного пола быть на 21 больше числа партий между участниками разного пола?

5. Числа $a, b, c, 44$ попарно различны и таковы, что уравнения $44x^2+ax+44=0$ и $44x^2+bx+c=0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, уравнения $44x^2+44x+a=0$ и $44x^2+cx+b=0$ тоже имеют общий действительный корень. Найдите значение $4a+b+c$.