Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1

Число x неизвестно, но известно число $A = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Выразите через A числа $B_k = x^k + \dfrac{1}{x^k}$ для $k = 2, 3, 4, 8$.

b) Выясните, при каких A и x выполняются равенства

$$B_2 = B_4 = B_8.$$

c) При каких значениях x (и, соответственно, A) количество арифметических операций для вычисления B_2 минимально? Вычислите при найденных значениях x величину

$$C = \left(\left(x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017}.$$

Решение. 1. Возводя A в степени 2,3, ..., несложно убедиться в справедливости формул

$$B_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2,$$

$$B_4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = B_2^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2,$$

$$B_8 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = B_4^2 - 2 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2,$$

$$B_3 = B_2 \cdot A - B_1 = (A^2 - 2)A - A = A(A^2 - 3).$$

2. Пусть $B_2 = B_4$, тогда $B_2 = B_2^2 - 2$, откуда

$$B_2^2 - B_2 - 2 = (B_2 + 1)(B_2 - 2) = 0.$$

Если $B_2 = A^2 - 2 = -1$ то $A = \pm 1$. Покажем, что условия $A = x + 1/x = 1$ невозможны. Если $x > 0$, то $x + 1/x \geq 2$. Если же $x < 0$, то $x + 1/x < 0$.

Если $B_2 = A^2 - 2 = 2$, то $A = \pm 2$. Этим значениям A соответствуют $x = \pm 1$.

3. Минимальное число операций равно 1, оно соответствует значению $x = 1$. В этом случае нет необходимости вычислять степени и вычисления сводятся к одному сложению. Соответствующее значение $A = 2$,

$$C = ((1 + 1)/2)^{2017} = 1.$$

Ответ. 1. $B_2 = A^2 - 2$, $B_3 = A(A^2 - 3)$, $B_4 = (A^2 - 2)^2 - 2$, $B_8 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2$.

2. $A = 2, x = 1$ или $A = -2, x = -1$.
3. $A = 2, x = C = 1$.

Задача 2

На тепловой электростанции запас газа всегда остается положительным и ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $6 - x$ м^3. Может ли запас газа в какой-то месяц составить точный квадрат запаса в другом месяце? Если это возможно, то при каком значении запаса и в какие месяцы?

Решение.
Пусть $f_n(x)$ — запас спустя n месяцев после некоторого фиксированного. По условию

$$f_0(x) = x, \quad f_1(x) = 6 - x.$$

Простой проверкой (попробовав явно первые месяцы) получаем что

$$f_n(x) = x \text{ для четных } n,$$

$$f_n(x) = 6 - x \text{ для нечетных } n$$

Осталось рассмотреть четыре квадратных уравнения

$$\begin{aligned} &x^2 = 6 - x, \\ &(6 - x)^2 = x, \\ &x^2 = x, \\ &(6 - x)^2 = 6 - x. \end{aligned}$$

Их решения, соответственно, равны

$$\begin{aligned} &x_1 = 2 \quad (\text{решение } x = -3 \text{ отбрасываем}) \\ &x_2 = 4, \quad (\text{решение } x = 9 \text{ отбрасываем, т.к. } 6 - 9 < 0) \\ &x_3 = 1, \quad (\text{решение } x = 0 \text{ отбрасываем}) \\ &x_4 = 5, \quad (\text{решение } x = 6 \text{ отбрасываем, т.к. } 6 - 6 = 0) \end{aligned}$$

Ответ:
в любые два четных месяца $x_1 = 1$;
в любые два нечетных месяца $x_2 = 5$;
в любой четный и любой нечетный месяц $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

Задача 3

Решите уравнение

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0.$$

Решение.

Перегруппируем слагаемые

$$\begin{aligned}
1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}&=\\
=-(x-1)+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}&=\\
=(x-1)\left(-1+\frac{x}{2}-\frac{x(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)&=\\
=(x-1)\left(\frac{1}{2}(x-2)-\frac{x(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)&=\\
=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x(x-3)}{1\cdot 3\cdot 4}\right)&=\\
=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)\left(-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{x(x-3)}{1\cdot 3\cdot 4}\right)&=\\
=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).&
\end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем все корни.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

Задача 4

Дан произвольный треугольник ABC. Найдите такую точку O внутри треугольника, чтобы площади треугольников AOB, BOC, AOC относились как $1:2:3$.

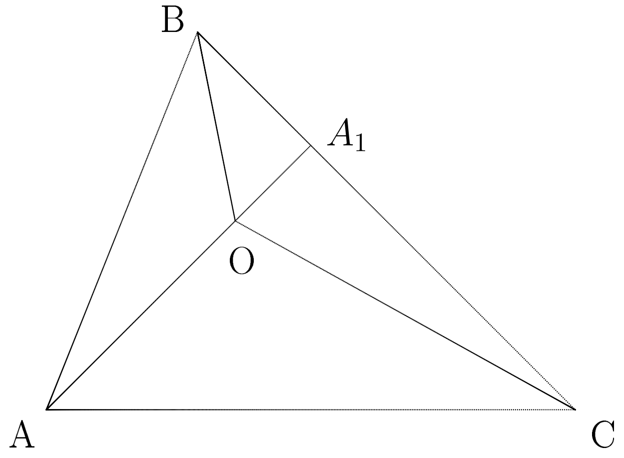
Решение.

Рассмотрим отрезок AA_1, содержащий искомую точку O (см. рис. ниже).

Площади треугольников $\triangle OBA_1$ и $\triangle OCA_1$ относятся друг к другу так же как длины отрезков BA_1 к CA_1 (т.к. имеют общую высоту, опущенную из т. O к прямой, содержащей названные отрезки).

То же самое верно для $\triangle ABA_1$ и $\triangle ACA_1$. Поскольку $\triangle ABA_1$ составлен из $\triangle OBA_1$ и $\triangle OBA$, а $\triangle ACA_1$ составлен из $\triangle OCA_1$ и $\triangle OCA$, то

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{S_{\triangle OBA}}{S_{\triangle OCA}}=\frac{3}{1}.$$



Рассуждая аналогично для отрезка BB_1 содержащего точку O, получаем, что

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{S_{\triangle OBA}}{S_{\triangle OCB}} = \frac{2}{1}.$$

Теперь достаточно построить точку A_1, делящую отрезок BC в отношении $1 : 3$ (считая от B) и точку B_1, делящую отрезок AC в отношении $1 : 2$ (считая от A). Пересечение отрезков AA_1 и BB_1 даст искомую точку O.

Несложно проверить, что отношения площадей всех трех указанных в условии треугольников удовлетворяют заданному соотношению.

Ответ: алгоритм поиска (построения) т. O дан в предпоследнем абзаце решения.

Задача 5

Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2+px+q$ имеет дискриминант, равный 100. Сколько корней имеет уравнение $f(x) + f(x-10) = 0$?

Решение.

График функции $f(x-10)$ получается из графика функции $f(x)$ сдвигом на 10 вправо вдоль оси абсцисс.

Из формулы корней видно, что расстояние между корнями равняется квадратному корню из дискриминанта, то есть 10. Таким образом, оба графика функций $f(x)$ и $f(x-10)$ пересекают ось абсцисс в одной и той же точке $(x_2; 0)$, где x_2 – больший корень уравнения $f(x) = 0$. Поэтому x_2 является корнем обоих уравнений, и, следовательно, корнем уравнения $g(x) = f(x) + f(x-10) = 0$.

Графики функций $f(x)$ и $f(x-10)$ симметричны друг другу относительно вертикальной прямой $x = x_2$, и, значит, график функции $g(x)$ также симметричен относительно этой прямой. Поэтому если $g(x)$ имеет ещё какой-нибудь корень $x = a$, то корнем является и $x = -a$, с учётом корня x_2 получаем, что число корней нечётно. Но $g(x)$ – квадратный трёхчлен, и имеет не больше двух корней, следовательно, уравнение $g(x) = f(x) + f(x - 10) = 0$ имеет один корень.

Ответ: 1 корень.