Вариант 17081 для 8 класса

Задача 1
Найдите числа x, y, z из уравнений

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

Решение.
Раскладывая на множители, получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \\ (y-1)(z-1)=3 \\ (z-1)(x-1)=6 \end{cases}$$

Перемножая все уравнения, имеем

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2=36.$$

Ясно, что тройка чисел $x=1$, $y=1$, $z=1$ не является решением. Поэтому разделим полученное выражение на квадрат первого уравнения и получим

$$(z-1)^2=9,$$

откуда $z=4$ или $z=-2$.

Первому значению соответствуют $x=3$ и $y=2$; второму – $x=-1$ и $y=0$

Ответ. $\{x,y,z\}=\{-1,0,-2\}$ или $\{3,2,4\}$.

Задача 2
Число x неизвестно, но известно число $A=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Выразите через A числа $B_k=x^k+\dfrac{1}{x^k}$ для $k=2,3,4,8$.

b) Выясните, при каких A и x выполняются равенства

$$B_2=B_4=B_8.$$

Решение. 1. Возводя A в степени 2, 3, …, несложно убедиться в справедливости формул

$$B_2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=A^2-2,$$

$$B_4=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=B_2^2-2=(A^2-2)^2-2,$$

$$B_8 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = B_4^2 - 2 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2,$$

$$B_3 = B_2 \cdot A - B_1 = (A^2-2)A - A = A(A^2-3).$$

2. Пусть $B_2 = B_4$, тогда $B_2 = B_2^2 - 2$, откуда

$$B_2^2 - B_2 - 2 = (B_2+1)(B_2-2) = 0.$$

Если $B_2 = A^2 - 2 = -1$ то $A = \pm 1$. Покажем, что условия $A = x + 1/x = 1$ невозможны. Если $x > 0$, то $x + 1/x \geq 2$. Если же $x < 0$, то $x + 1/x < 0$.

Если $B_2 = A^2 - 2 = 2$, то $A = \pm 2$. Этим значениям A соответствуют $x = \pm 1$.

Ответ. 1. $B_2 = A^2 - 2,\ B_3 = A(A^2-3),\ B_4 = (A^2-2)^2 - 2,$
$B_8 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2.$

2. $A = 2, x = 1$ или $A = -2, x = -1$.

Задача 3

На завод привезли несколько энергосберегающих приборов суммарным весом 120 кг. Известно, что общий вес трёх самых лёгких приборов составил 31 кг, а трёх самых тяжёлых – 41 кг. Сколько энергосберегающих приборов привезли на завод, если веса любых двух приборов различны?

Решение.

Общий вес всех приборов, за исключением трёх самых лёгких и трёх самых тяжёлых, равен $120 - 31 - 41 = 48$ кг. Пусть этих приборов n штук. Вес каждого из них больше веса самого тяжёлого прибора среди трёх самых лёгких, а он (по принципу Дирихле) больше, чем $31/3$ кг.

Аналогично, вес каждого из n приборов меньше веса самого лёгкого прибора из трёх самых тяжёлых, который, в свою очередь, меньше, чем $41/3$ кг.

Имеем двойное неравенство

$$\frac{31}{3}n < 48 < \frac{41}{3}n,$$

которое равносильно неравенству $\dfrac{144}{41} < n < \dfrac{144}{31}$.

Единственное натуральное число в полученном промежутке – это число 4. Значит, $n = 4$, а всего завезли $3 + 3 + 4 = 10$ приборов.

Пример на 10 приборов легко строится: например, веса приборов в кг (в порядке возрастания) таковы:

$$29/3, 31/3, 33/3, 34/3, 35/3, 36/3, 39/3, 40/3, 41/3, 42/3.$$

Ответ. 10 приборов.

Задача 4

Два брата получили в наследство покос в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как $3:4$. Чтобы разделить его, они выходят из вершины прямого угла (каждый по своему катету) и идут по краю покоса (по периметру) с одинаковой скоростью до встречи друг с другом. Точку встречи соединяют с началом их пути и получают две треугольные части.
А) Получились ли у братьев части одинаковой площади?
Б) Сколько существует различных прямоугольных треугольников с другим соотношением катетов, для которых построенные указанным способом части будут равны по площади?

Решение.

Согласно условию, дана точка на гипотенузе, которая делит периметр на две равные части (считая от вершины прямого угла).

Очевидно, что если катеты не равны друг другу, то эта точка делит гипотенузу на две неравные части.

При вычислении площадей двух полученных разбиением треугольников эти неравные части гипотенузы следует умножать на одну и ту же высоту (опущенную из прямого угла на гипотенузу). Поэтому площади не будут равны.

Ответ на вопрос Б) теперь очевиден.

Ответ А) нет. Б) Только один (по форме) – равнобедренный.

Задача 5

Рано утром включили насос и начали заполнять резервуар для горючего. В 10 ч утра включили второй насос, который начал откачивать горючее. В 12 ч в резервуар был заполнен наполовину, а в 14 ч резервуар заполнился на 2/3. Каким может быть время самого раннего включения первого насоса?

Решение.

Пусть до момента включения второго насоса первый проработал x часов. Пусть y – производительность первого насоса, а z – производительность второго насоса. Тогда

$$(x+2)y-2z=1/2,$$
$$(x+4)y-4z=2/3$$

или

$$xy + 2y - 2z = 1/2,$$
$$xy + 4y - 4z = 2/3.$$

Это линейная система относительно неизвестных (xy) и $(y - z)$. Решая ее, получаем

$$y - z = 1/12 \quad \text{и} \quad xy = 1/3.$$

Минимально возможное $y = 1/12$. Поэтому максимально возможное $x = 4$.

Ответ: 6ч утра.