Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1

На автобазе 31 машина. Закуплено некоторое количество топлива из расчета a литров в неделю на каждую машину. Но получилось так, что каждую неделю одна из машин полностью выходила из строя, поэтому закупленного топлива хватило на двойной срок. Какое количество топлива было закуплено и на сколько времени оно было рассчитано?

Решение.

Пусть топливо было закуплено на y недель. Тогда расчетное количество топлива равно $31ay$ литров. Но в первую неделю было потрачено $31a$ литров, во вторую – $30a$ литров и так далее до $31-(2y-1)a$ литров, что в сумме дает

$$31a + 30a + \ldots + (31-(2y-1))a = \frac{31+31-2y+1}{2} \cdot 2y \cdot a = (63-2y)ay.$$

Остается решить уравнение

$$31ay = (63-2y)ay,$$

из которого получаем, что $y = 16$ (недель), на которые было закуплнено $31 \cdot 16 \cdot a = 496a$ литров топлива.

Ответ: было закуплено $496a$ литров топлва на 16 недель.

Задача 2

В гости были приглашены 20 человек. Екатерина танцевала с семью кавалерами, Ольга-с восемью, Ирина-с девятью и так далее до Алены, которая танцевала со всеми кавалерами. Сколько танцоров-кавалеров было приглашено в гости?

Решение.

Пусть в гостях было x девушек.

Первая (Екатерина) танцевала с $7 = 6+1$ кавалерами,
вторая – с $8 = 6+2$ кавалерами,
третья – с $9 = 6+3$ кавалерами.
Соответственно, x-я (Алена) – с $6+x$ кавалерами.

Таким образом, согласно условию, всего кавалеров было $6+x$, что в сумме с x девушками должно давать 20.

Из уравнения $6+x+x = 20$ находим $x = 7$. Это количество девушек. Значит, кавалеров было $20-7 = 13$.

Ответ: 13 танцоров-кавалеров было приглашено в гости.

Задача 3

Снег пошёл, когда часы на башне показывали z часов y минут (часы показывают время в формате от 00.00 до 23.59), и продолжал идти в течение x часов z минут. Когда снег перестал, на часах было у часов х минут. Найдите все возможные значения разности $x - y$.

Решение.

Число минут времени окончания снегопада $x = y + z + 60k$. Но поскольку $x < 60$, то $k = 0$ и $x = y + z$.

Число часов у времени окончания снегопада отличается от суммы $z + x = 2z + y$ на число, кратное 24 (число часов в сутках), то есть

$$y + 24m = 2z + y.$$

Отсюда $z = 12m$, а так как $z < 24$, то либо $z = 0$, либо $z = 12$.

Из равенства $x = y + z$ находим разность $x - y = z$.

Оба значения возможны: например, при $z = 0$: от момента 00.07 до момента 07.07 проходит ровно 7 часов; при $z = 12$: от момента 12.07 до момента 07.19 проходит 19 часов 12 минут.

Ответ: 0 или 12.

Задача 4

Два брата получили в наследство поле в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как 4 : 5, и разделили его по прямой линии, соединяющей вершину прямого угла с серединой противоположной стороны.

А) Получили ли братья части равной площади?

Б) Могут ли ограды, поставленные вокруг каждой части, иметь равную длину?

Решение.

Согласно условию, дана точка на гипотенузе, которая делит ее пополам.

При вычислении площадей двух полученных разбиением треугольников эти равные части гипотенузы следует умножать на одну и ту же высоту (опущенную из прямого угла на гипотенузу). Поэтому площади будут равны.

Тот же ответ можно получить без использования формулы площади треугольника. Для этого нужно опустить высоты из середины гипотенузы к катетам и увидеть, что получилось четыре одинаковых треугольника.

Б) Каждая ограда состоит из трех частей (сторон треугольников). Одна сторона у них общая, еще по одной равны (это половины гипотенузы), а третьи стороны – не равны (т.к. не равны катеты).

Ответ. А) да. Б) нет.

Задача 5

Что больше:

$$\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2+2,00000000004}$$

или

$$\frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2+2,00000000002}\ ?$$

Решение.

Пусть $a = 1,00000000004$, $b = 1,00000000002$.

Требуется сравнить $\dfrac{1+a}{1+a+a^2}$ и $\dfrac{1+b}{1+b+b^2}$. Рассмотрим разность

$$\frac{1+b}{1+b+b^2}-\frac{1+a}{1+a+a^2}=\frac{a+a^2+b+a^2b-b-b^2-ab^2}{(1+b+b^2)(1+a+a^2)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b+ab)}{(1+b+b^2)(1+a+a^2)}.$$

Каждая скобка в полученном выражении положительна, следовательно, вторая дробь больше первой.

Ответ: $\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2+2,00000000004} < \frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2+2,00000000002}$.