Материалы заданий отборочного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2016/2017 учебном году

Задача 1 (11 класс)

Двухтарифный счетчик электроэнергии ведет раздельный учет затрат в "ночное" и "дневное" время, при этом "ночной" тариф составляет 80% "дневного". Если "дневной" тариф повысится на 10% (при неизменном "ночном"), то какой процент "дневного" расхода электроэнергии придется перенести на "ночное" время, чтобы суммарная суточная стоимость осталась без изменений?

Решение.

Пусть суммарный суточный расход равен M. Представим имеющуюся информацию в виде таблицы.

	ночной	дневной	соотношения
до изменения			
тариф	p	q	$p = 0.8q$
расход	x	y	$x + y = M$
стоимость	px	qy	$= 0.8xq + yq$
после изменения			
тариф	p	$1.1q$	$p = 0.8q$
расход	a	b	$a + b = M$
стоимость	pa	$1.1qb$	$= 0.8aq + 1.1bq$

Поскольку смарная стоимость не изменилась, получаем уравнение

$$0.8xq + yq = 0.8aq + 1.1bq.$$

Преобразуем его:

$$0.8(x + y) + 0.2y = 0.8(a + b) + 0.3b.$$

Первые слагаемые равны друг другу (т.к. расход остается неизменным), следовательно $b = \frac{2}{3}y$.

Это означает, что $\frac{1}{3}$ часть дневного расхода нужно перенести на ночное время.

Ответ. $\frac{1}{3}$ часть или $33,(3)\%$.

Задача 2 (11 класс).

Для функции

$$f(x) = \sqrt{3x + \sqrt{2} - 1} + x$$

решите уравнение $f(f(f(x))) = f(x)$.

Решение. Функция имеет вид $f(x) = x + \sqrt{ax+b}$, $a > 0$.

Она монотонно возрастает, поэтому уравнение $f(f(f(x))) = f(x)$ эквивалентно уравнению $f(f(x)) = x$. Вычислим

$$f(f(x)) = f(x) + \sqrt{af(x)+b} = x + \sqrt{ax+b} + \sqrt{a(x+\sqrt{ax+b})+b}.$$

С учетом этого уравнение примет вид

$$x + \sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+b+a\sqrt{ax+b}} = x.$$

Равенство возможно только при выполнении условий

$$ax+b=0, \qquad ax+b+a\sqrt{ax+b}=0.$$

Если $ax+b=0$, то $ax+b+a\sqrt{ax+b} = 0+a\sqrt{0} = 0$. Таким образом, $x = -b/a$.

Ответ. $x = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$.

Задача 3 (11 класс)

В шахматном кружке занимаются мальчики и девочки. Их разбили на группы по 6 человек, причем в каждой группе есть и девочки, и мальчики. В каждой группе прошел круговой турнир, каждый сыграл по одной партии с каждым из остальных членов той же группы, других игр не было. Может ли при этом число партий между мальчиками быть на 23 больше числа партий между девочками?

Решение. Число мальчиков в каждой группе может принимать значения $k = 1, 2, 3, 5$. Рассмотрим следующие величины:
N_k — число групп, в которых по k мальчиков и $(5-k)$ девочек;
m_k — число игр между мальчиками в группе, содержащей ровно k мальчиков;
g_k — число игр между девочками в группе, содержащей ровно k мальчиков.

При этом

$$m_k = k(k-1)/2, \text{ если } k = 2, 3, 4, 5;$$

$$g_k = (6-k)(5-k)/2, \text{ если } k = 1, 2, 3, 4;$$

$$m_1 = g_5 = 0.$$

Занесем эти данные в таблицу.

k	$6-k$	m_k	g_k
1	5	0	10
2	4	1	6
3	3	3	3
4	2	6	1
5	1	10	0

Пусть $N(mm)$, $N(gg)$, $N(m)$, $N(g)$ — суммарное количество игр во всех группах между мальчиками, между девочками, с участием мальчиков (хотя бы один из двух игроков мальчик) и, соответственно, с участием девочек. Имеем:

$$N(mm) = \sum_{k=0}^{6} N_k m_k = N_2 + 3N_3 + 6N_4 + 10N_5,$$

$$N(gg) = \sum_{k=0}^{6} N_k g_k = 10N_1 + 6N_2 + 3N_3 + N_4,$$

Тогда

$$N(mm) - N(gg) = -10N_1 + (1-6)N_2 + (6-1)N_4 + 10N_5$$

кратно 5 и не может быть равно 22 или 23. Далее,

$$N(m) = N(mm) + N(mg),\ N(g) = N(gg) + N(mg),$$

$$N(m) - N(g) = N(mm) - N(gg)$$

кратно 5 и не может быть равно 28 или -4.

Ответ: нет.

Задача 4 (10 класс).

Сколько различных 4-значных чисел, кратных 6, можно образовать из цифр числа 2016, если цифры могут повторяться без ограничений?

Решение. Пусть $c_1, \ldots, c_4$ — последовательные цифры числа. Тогда $c_1 \neq 0$, сумма цифр $c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ кратна 3 и для делимости на 6 достаточно четности числа, т. е. c_4 может принимать значения 0, 2 или 6.

Далее простым перебором двух средних цифр (с учетом делимости всей суммы на 3) можно найти количество вариантов для каждой комбинации первой и последней цифры. Приведем их в виде таблицы.

\ последняя цифра первая цифра \	0	2	6
1	5 вариантов	6 вариантов	5 вариантов
2	5 вариантов	5 вариантов	5 вариантов
3	6 вариантов	5 вариантов	6 вариантов

Всего получается $5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 48$ вариантов.

Ответ: 48.

Задача 5 (10 класс)

Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 3x - 2y, \\ \sqrt{x-y} - \sqrt{x+y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

Могут ли все точки, соответствующие решениям, быть вершинами многоугольника? Если такой многоугольник существует, найдите его площадь.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получим

$$\sqrt{x-y}(2 - 5\sqrt{x-y}) = 0, \quad \sqrt{x+y}(2 - \sqrt{x+y}) = 0.$$

Тогда возможны 4 случая.

1. $\sqrt{x-y} = 0$, $\sqrt{x+y} = 0$. Решение $(x, y) = (0, 0)$.
2. $\sqrt{x-y} = 0$, $\sqrt{x+y} = 2$. Решение $(x, y) = (2, 2)$.
3. $\sqrt{x-y} = 2/5$, $\sqrt{x+y} = 0$. Решение $(x, y) = (2/25, -2/25)$.
4. $\sqrt{x-y} = 2/5$, $\sqrt{x+y} = 2$. Решение $(x, y) = (52/25, 48/25)$.

Точки, соответствующие решениям, — вершины прямоугольника. Площадь прямоугольника $2\sqrt{2}(2/25)\sqrt{2} = 8/25$.

Ответ: $(x, y) = (0, 0), (2, 2), (2/25, -2/25), (52/25, 48/25)$, прямоугольник площади $8/25$.

Задача 6 (10 класс)

Эстетически совершенным считается прямоугольник, длины a, b сторон которого образуют *золотое сечение*, т. е. связаны соотношениями

$$a < b, \qquad \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}.$$

Некий архитектор задумал проект здания в виде прямоугольного параллелепипеда, у которого золотые сечения образуют ширина и длина, длина и высота, а также периметр основания и площадь боковой поверхности. Найдите объем такого параллелепипеда, длину его диагонали и отношение площади боковой поверхности к площади основания.

Решение. Пусть a, b, c — ширина, длина и высота здания. Тогда $a < b < c$, площадь бок. поверхности равна $S = 2c(a + b)$, периметр основания равен $P = 2(a + b)$, площадь основания. По условию

$$b/a = c/b = S/P = \Phi. \qquad (1)$$

Из уравнения $\Phi^2 = \Phi + 1$ находим $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, тогда $\Phi^2 = (3 + \sqrt{5})/2$. Из (1) находим $c = \Phi$, $b = 1$, $a = 1/\Phi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Вычислим объем V, длину диагонали d и отношение площадей:

$$V = abc = 1,\ d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2,\ k = 2c(a + b)/ab = 2\Phi(1 + \Phi) = 4 + 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $1,\ 2,\ 4 + 2\sqrt{5}$.

Задача 7 (10 класс)

Электронные часы отстают, хотя и показывают на табло в данный момент на 4 минуты больше, чем следует. Если бы они показывали на 6 минут больше, чем следует, но отставали бы на минуту в сутки больше, чем сейчас, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки отстают часы?

Решение. Пусть часы отстают на X минут в сутки. Тогда они покажут точное время через $4/X$ суток. Если бы они отставали на $X + 1$ минуту в сутки, а показывали бы на шесть минут больше, то точное время они показали бы через $6/(X + 1)$ суток. Следовательно

$$\frac{6}{X + 1} + 1 = \frac{4}{X}, \quad \text{откуда} \quad X^2 + 3X - 4 = 0.$$

Получаем два корня: $X = -4$ (не подходит по условию) и $X = 1$.

Ответ: часы отстают на одну минуту в сутки.

Задача 8 (9 класс)

Опишите все выпуклые n-угольники, углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ которых удовлетворяют соотношению

$$\sin^n \alpha_1 + \sin^{n-1} \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n - n = 0.$$

Решение.
Исходное уравнение, очевидно, эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin \alpha_1 = 1, \\ \sin \alpha_2 = 1, \\ \ldots \\ \sin \alpha_n = 1. \end{cases}$$

Следовательно, все углы – прямые, поскольку для выпуклого многоугольника $0 < \alpha_k < \pi$ $(k = 1, \ldots, n)$. Таким выпуклым n-угольником может быть только прямоугольник $(n = 4)$.

Ответ. Это прямоугольники.

Задача 9 (9 класс)

Вар. 1. Пусть $X = \overline{abcd}$ — целое четырехзначное десятичное число, записанное цифрами a, b, c, d такими, что $0 < a < b < c < d$, Y — число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Может ли число $Y - X$ иметь сумму цифр 16?

Решение.
Разность – 4-значное число, оно имеет вид $\overline{x_3 x_2 x_1 x_0}$. $x_0 = a + 10 - d$, $x_1 = b - 1 + 10 - c$, $x_2 = c - 1 - b$, $x_3 = d - a$. Складывая, получаем 18.

Ответ: Нет.

Задача 10 (8 класс)

В больнице четыре хирургические операции завершились одновременно. Суммарное врнмя их выполнения составило 2 часа 32 минуты. За полчаса до окончания операций суммарное время работы врачебных бригад составляло 52 минуты, а еще 10 минутами раньше оно было равно 0,5 часа. Найдите длительность выполнения двух наиболее быстрых операций.

Решение

1. Требуется найти длительности x_1, x_2, x_3, x_4. Упорядочим их по неубыванию:

$$0 < x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4.$$

Известна их сумма

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S_0 = 152 \text{ мин}$$

(в настоящий момент) и суммы S_m, S_n для моментов, находящихя на $m = 30$ и $n = 40$ минут раньше $(m < n)$.

2. Если $S_m = x_1 - m + x_2 - m + x_3 - m + x_4 - m$, то $S_m = S_0 - 4m$. Но согласно числовым данным задачи это не так, следовательно,

$$x_1 \le m.$$

3. Если и $x_2 \le m$, то

$$S_m = x_3 + x_4 - 2m, \quad S_n = x_3 + x_4 - 2n$$

и тогда $S_m + 2m = S_n + 2n$. Но согласно числовым данным задачи это не так, следовательно,

$$x_1 \le m < x_2, \quad S_m = x_2 + x_3 + x_4 - 3m.$$

4. Если $x_2 > n$, то $S_n = x_2 + x_3 + x_4 - 3n$ и $x_2 + x_3 + x_4 = S_m + 3m = S_n + 3n$. Согласно данным задачи это неверно, следовательно,

$$0 < x_1 \le m < x_2 \le n, \quad S_n = x_3 + x_4 - 2n.$$

5. Имеем уравнения

$$x_2 + x_3 + x_4 = S_m + 3m, \quad x_3 + x_4 = S_n + 2n.$$

Из них находим x_2.

6. Из уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S_0, \quad x_2 + x_3 + x_4 = S_m + 3m$$

находим x_1.

Ответ 10 и 32 мин.

Задача 11 (8 класс)

При вычислении дроби

$$\frac{Ax + B}{C - Bx}$$

ученик совершил ошибку, заменив x на $-x$. Найдите все числа A, B, C, для которых такая дробь не изменяется при любой замене допустимого числа x на допустимое число $-x$.

Решение

Условие

$$\frac{Ax+B}{C-Bx} = \frac{-Ax+B}{C+Bx}$$

преобразуем к виду $(Ax+B)(C+Bx) = (-Ax+B)(C-Bx)$ и далее

$$ABx^2 + (AC+B^2)x + BC = ABx^2 - (AC+B^2)x + BC,$$

откуда

Ответ: любая тройка чисел $\{A, B, C\}$, удовлетворяющая условию $AC + B^2 = 0$.

Задача 12 (7 класс)

Числа x, y удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x-2y} = \frac{1}{x} - \frac{2}{y}.$$

Найдите значение $(x-y)^2$.

Решение. Имеем ОДЗ $x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq 2y$. Запишем ур-е в виде

$$\frac{1}{x-2y} - \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 0.$$

Для числителя получаем $xy - y(x-2y) + 2x(x-2y) = 0$, т. е. $x^2 + y^2 - 2xy = 0$. Таким образом,

$$y = x,\ x \neq 0.$$

Ответ: 0.