Решения вариантов заключительного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2016/2017 учебном году

Вариант 17111 для 11 класса

Задача 1

Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компании за 2016 год составила S миллионов рублей, где

$$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \cdots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ).$$

Совет директоров не удовлетворился этими сведениями и попросил аналитика указать не формулу вычисления S, а результат, т. е. конкретное число. Через 11 минут число S было получено. Каково оно?

Решение.

Заметим, что $2017^\circ = 11 \cdot 180^\circ + 37^\circ$ и выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
&\lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \cdots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ) = \\
&= \lg\left(10^{4+5+\ldots+20} \cdot \operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53^\circ\right) = \\
&= \lg\left(10^{(4+20)\cdot\frac{17}{2}} \cdot (\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 53^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 38^\circ \cdot \operatorname{tg} 52^\circ) \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ\right) = \\
&= \lg\left(10^{12\cdot 17} \cdot (1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1\right) = 204.
\end{aligned}$$

Ответ: $S = 204$.

Задача 2

На тепловой электростанции запас газа ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $c - 2x$ м^3. Может ли запас газа оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца? Если это возможно, то какое значение имеет запас, одинаковый для двух разных месяцев?

Решение.

Пусть $f_n(x)$ — запас спустя n месяцев после некоторого фиксированного. Рассмотрим произвольную линейную функцию

$$f(x) = f_1(x) = a - bx, \quad b \neq -1$$

При этом

$$f_n(x) = (-b)^n x + a(1 - b + b^2 - b^3 + \cdots + (-b)^{n-1}).$$

Уравнение $f_n(x) = f_m(x)$, $m > n$, принимает вид

$$((-b)^n - (-b)^m)x = a((-b)^n + (-b)^{n+1} + \cdots + (-b)^{m-1}).$$

Находим

$$x = \frac{a((-b)^m - (-b)^n)}{(-b-1)((-b)^n - (-b)^m)} = \frac{a}{b+1}.$$

Подставляя $a = c$ и $b = 2$, получаем $x = c/3$.

Ответ: для любых двух различных месяцев возможен одинаковый запас газа, он равен $x = c/3$ м^3.

Задача 3

Окружность S_1, которая касается параболы $y = x^2$ в ее вершине, имеет диаметр 1. Каждая из последующих окружностей $S_2, S_3, S_4, \ldots$ касается внешним образом предыдущей окружности и ветвей параболы. Найдите радиус окружности S_{2017}.

Решение.

Пусть r_n – радиус n – ой окружности, $Q_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.

Тогда центр $(n+1)$ – ой окружности находится в точке с координатами $(0, 2Q_n + r_{n+1})$, а ее уравнение имеет вид $x^2 + (y - (2Q_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2$.

Условие касания этой окружностью ветвей параболы $y = x^2$ означает единственность решения уравнения $y + (y - (2Q_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2$. После раскрытия скобок и приведения подобных уравнение приводится к виду

$$y^2 - (4Q_n + 2r_{n+1} - 1) + 4Q_n^2 + 4Q_n r_{n+1} = 0.$$

Его дискриминант должен быть равен нулю. Получаем

$$D = (4Q_n + 2r_{n+1} - 1)^2 - 4(4Q_n^2 + 4Q_n r_{n+1}) = (2r_{n+1} - 1)^2 - 8Q_n = 0,$$

откуда $r_{n+1} = \sqrt{2Q_n} + 1/2$. Так как $r_1 = 1/2$, то $r_2 = 3/2$, $r_3 = 5/2$ и т.д. по индукции получаем

$$r_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2}.$$

Поэтому $r_{2017} = 2016.5$.

Ответ: 2016,5.

Задача 4

Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$. Найдите наименьшее значение выражения $a + b + c$.

Решение.

Положим $x=2a, y=2b, z=2c$. Тогда
$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=3.$$
Поэтому
$$a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{yz}+y+\frac{y}{xz}+z+\frac{z}{xy}-3\right).$$
По неравенству Коши для среднего арифметического и среднего геометрического $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$, следовательно,
$$x+\frac{x}{yz}+y+\frac{y}{xz}+z+\frac{z}{xy}\geq 3\left(\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right)\geq 3\cdot 2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}}}=6.$$
Тогда $a+b+c=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{yz}+y+\frac{y}{xz}+z+\frac{z}{xy}-3\right)\geq\frac{1}{2}(6-3)=\frac{3}{2}$.

Неравенства Коши $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$ и $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ обращаются в равенства при $x=y=z$. С учётом этого условия неравенство
$$\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\geq 2$$
обращается в равенство при $x=y=z=1$. Таким образом, наименьшее значение выражения $a+b+c$, равное $\frac{3}{2}$, достигается при $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

Задача 5

Для каждого натурального $n>1$ пусть $S(n)$ означает число решений уравнения $\sin nx=\sin x$ на интервале $[0,\pi]$. Найдите явный вид зависимости $S(n)$ от n и определите, сколько раз $S(n)$ принимает значение 2017.

Решение.

По формуле разности синусов $\sin x-\sin nx = 2\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n-1}{2}x$, что обращается в 0 при $\cos\frac{n+1}{2}x=0$ или при $\sin\frac{n-1}{2}x=0$.

Из первого уравнения получаем $\frac{n+1}{2}x=\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi$, откуда $x=\dfrac{(2j+1)\pi}{n+1}$ для любых целых j. Поскольку $x\in[0,\pi]$, то $j\in[0,n/2]$. Таким образом, в этом случае есть $1+[\frac{n}{2}]$ решений, где $[a]$ обозначает целую часть числа а.

Второе уравнение имеет решение $\frac{n-1}{2}x=k\pi$, или $x=\dfrac{2k\pi}{n-1}$ для любых целых k. Поскольку $x\in[0,\pi]$, то $k\in[0,\frac{n-1}{2}]$. В этом случае есть $1+[\frac{n-1}{2}]=[\frac{n+1}{2}]$ решений.

Однако среди решений первого и второго уравнения могут быть одинаковые, необходимо найти их. Решения будут совпадать, если $\dfrac{2j+1}{n+1} = \dfrac{2k}{n-1}$, откуда $k = \dfrac{(2j+1)(n-1)}{2(n+1)}$, что эквивалентно делимости нацело числителя на знаменатель. При чётных n это невозможно, так как числитель – нечётное число, а знаменатель – чётное.

Если $n = 3(\mod 4)$, тогда знаменатель кратен 8, а числитель кратен только 2, то есть этот случай также невозможен.

Рассмотрим оставшийся случай $n = 1(\mod 4)$. Условие «k – целое число» эквивалентно делимости $(2j+1)(n-1)/4$ на $(n+1)/2$. Докажем, что $(n-1)/4$ и $(n+1)/2$ взаимно просты. Действительно, если предположить, что у них есть общий делитель d, то $(n-1)/4 = ad$ и $(n+1)/2 = bd$. Вычтем из второго выражения удвоенное первое: $(n+1)/2 - 2(n-1)/4 = 1$, то есть $bd - 2ad = d(b-2a) = 1$. Отсюда следует, что $d = 1$. Следовательно, $(2j+1)$ делится на $(n+1)/2$, при этом $j \in [0, n/2]$, и с учётом нечётности n, $j \leq (n-1)/2$. Поэтому $2j+1 \leq n$, но $n < n+1 = 2(n+1)/2$, то есть $2j+1 \leq (n+1)/2$. Значит, единственный случай, когда $(2j+1)$ делится на $(n+1)/2$ – это случай, когда $2j+1 = (n+1)/2$, откуда $j = (n-1)/4$.

Таким образом, для каждого $n = 1(\mod 4)$ совпадает одно решение первого и второго уравнения.

В итоге, формула для $S(n)$ принимает вид:

$$S(n) = \begin{cases} 1 + [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}], & n \neq 1(\mod 4) \\ [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}], & n = 1(\mod 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1, & n \neq 1(\mod 4) \\ n, & n = 1(\mod 4). \end{cases}$$

Поскольку $2017 = 1(\mod 4)$, то $S(2016) = 2016 + 1 = 2017$ и $S(2017) = 2017$. Значит, значение 2017 принимается 2 раза.

Ответ: а) $S(n) = \begin{cases} n+1, & n \neq 1(\mod 4) \\ n, & n = 1(\mod 4) \end{cases}$, б) 2 раза.