Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1

Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компании за 2016 год, выраженная в миллионах рублей, удовлетворяет уравнению

$$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35.$$

Должен ли совет директоров компании поверить этому?

Решение.

Найдем решения уравнения из условия задачи.

Положим $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, тогда $x^2y^2 = x^2+y^2$ и $xy > 0$. По условию, $x+y = \frac{35}{12}$, следовательно, $x^2+y^2+2xy = \left(\frac{35}{12}\right)^2$, т.е.

$$x^2y^2 + 2xy - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно xy и, учитывая, что $xy > 0$, получаем $xy = \frac{25}{12}$. Теперь x и y легко найти из системы уравнений

$$\begin{cases} xy = \frac{25}{12}, \\ x+y = \frac{35}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение имеет два решения $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = \frac{5}{3}$. Но прибыль не может одновременно принимать два разных значения.

Ответ: нет, нельзя верить двусмысленным финансовым решениям.

Задача 2

На тепловой электростанции запас газа всегда остается положительным и ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $1/(1-x)$ м^3. Может ли запас газа оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца? Если это возможно, то какое значение имеет запас, одинаковый для двух разных месяцев?

Решение.

Пусть $f_n(x)$ — запас спустя n месяцев после некоторого фиксированного. Тогда

$$f_0(x) = x,\ f_1(x) = \frac{1}{1-x},\ f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = 1 - \frac{1}{x},$$

$$f_3(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - (1-x) = x.$$

Далее функции в последовательности f_n будут циклически повторяться, последовательность f_n периодическая с периодом 3, имеется всего три вида функций:

$$f_{3k}(x) = x,\ f_{3k+1}(x) = \frac{1}{1-x},\ f_{3k+2}(x) = 1 - \frac{1}{1-x}.$$

Если номера m и n имеют одинаковый остаток при делении на 3, то запасы $f_m(x)$ и $f_n(x)$ через m и n месяцев одинаковы при любых допустимых x (x может быть отрицательным, это значит, что запаса нет, а есть недостаток величины $(-x)$ м^3. Покажем, что при любых других парах m и n запасы через m и n месяцев не могут быть равны ни при каких x. Для этого рассмотрим три уравнения:

$$x = \frac{1}{1-x},\ x = 1 - \frac{1}{x},\ \frac{1}{1-x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Каждое из них преобразуется к квадратному уравнению $x^2 - x + 1 = 0$ с отрицательным дискриминантом.

Теперь рассмотрим условие положительности запаса. Из неравенств

$$x > 0, \quad \frac{1}{1-x} > 0$$

получаем, что $x \in (0,1)$. Однако в указанном диапазоне $1 - \dfrac{1}{1-x} < 0$.

Поэтому условие положительности может быть выполнено только если месяцев не более двух. Но для двух соседних месяцев равенство запасов невозможно.

Ответ: нет.

Задача 3

Найдите все решения уравнения

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

Решение.

Уравнение имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{j!} = 0. \tag{1}$$

Пусть k — натуральное число, $k \le n$. Подставим $x = k$ в левую часть уравнения, получим

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} = 0$$

(остальные слагаемые в левой части (1) обращаются в 0). Введем обозначение

$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Тогда

$$C_k^j = C_k^{k-j} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}, \quad C_k^0 = C_k^k = 1.$$

Докажем, что

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j = 0. \tag{2}$$

Отметим содержательный смысл чисел C_k^j — это количество j-элементных неупорядоченных подмножеств (j-сочетаний) k-элементного множества.

Рассмотрим **два способа** доказательства формулы (2).

Первый — вывести формулу бинома

$$(1+t)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j t^j \tag{3}$$

и из нее получить (2), полагая $t = -1$.

Рассмотрим выражение

$$(1+t)^k = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdots(1+t)}_{k}.$$

Преобразуем это произведение скобок (сумм $(1+t)$) в сумму произведений. Каждое произведение в такой сумме содержит ровно k множителей, из которых ровно j множителей равны t, а остальные $k-j$ множителей равны 1, при этом $j = 0, \ldots, k$. Количество слагаемых вида $1^{k-j}t^j$ есть ровно C_k^j, это количество выбрать ровно j скобок $(1+t)$, из которых в произведение берется в качестве множителя слагаемое t. Таким образом, формула (3) доказана.

Замечание. Во многих школах формулу бинома проходя в 10-м и даже 9-ом классе. Если участник знает ее и использует, вывод не требуется; тот, кто не знает, может быстро ее вывести, как показано здесь, а может быть, другим способом (например, матем. индукцией по параметру k).

Второй способ. При нечетных k в (1) получаем

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor}(-1)^j (C_k^j - C_k^{k-j}) = (\lfloor k/2 \rfloor + 1)0 = 0,$$

что доказывает (2) при нечетных k.

Остается обосновать (2) при четных k. Для этого докажем тождество

$$C_k^j = C_{k-1}^{j-1} + C_{k-1}^j, \quad j = 1, \ldots, k-1 \tag{4}$$

(с его помощью строится треугольник Паскаля).

Рассмотрим $(k-1)$-элементное множество $U_1 = \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, k-элементное множество $U = U_1 \cup \{e_k\}$ и все j-сочетания для U. Число таких сочетаний равно, как отмечалось, C_k^j. Разобьем их на две непересекающиеся группы:
1) содержащие e_k,
2) не содержащие e_k.
Сочетания вида 1) — это $(j-1)$-сочетания элементов множества U_1, их количество равно C_{k-1}^{j-1}. Сочетания вида 2) есть j-сочетания м-ва U_1, их число равно C_{k-1}^j. Количества сочетаний вида 1) и вида 2) в силу непересечения групп дают в сумме C_k^j. Тождество (4) доказано.

Теперь рассмотрим четное k и сумму из левой части (2). Ее представим в виде

$$1 - (C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1) + (C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2) - \cdots - (C_{k-1}^{k-2} + C_{k-1}) + 1.$$

После элементарных преобразований останется

$$1 - C_{k-1}^0 - C_{k-1}^{k-1} + 1 = 0 + 0,$$

т. е. (2) верно и при четных k.

Можно даже при втором способе не разделять случаи четного и нечетного k, а вывести (2) индукцией по k.

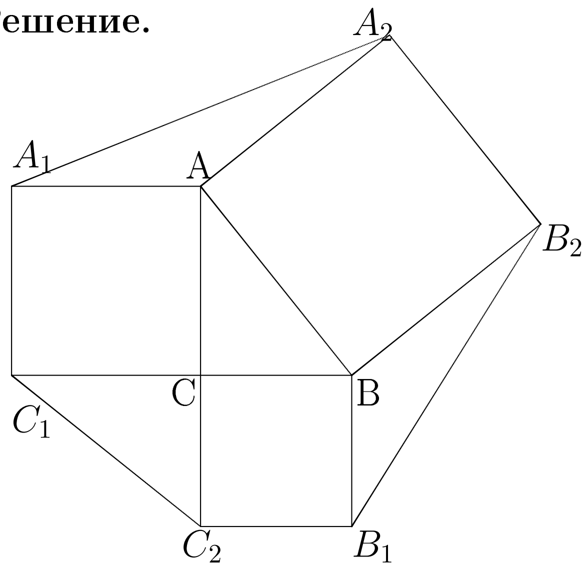
Таким образом, $x = k = 1, \ldots, n$ — корни уравнения. В левой части (1) многочлен степени n, уравнение не может иметь более n корней, значит $1, \ldots, n$ — все его корни.

Ответ: $x = 1, \ldots, n$.

Задача 4

Господин Бур Жуй, большой поклонник фэн-шуй, получил в наследство дом, представляющий собой в плане прямоугольный треугольник с катетами a и b. К каждой стороне треугольника он пристроил квадратные веранды. Те 6 вершин этих трех квадратов, которые не совпадают с вершинами треугольника, образуют шестиугольник. В этот шестиугольник и был в итоге превращен дом, который построил господин Бур Жуй. Найдите его площадь. При каком соотношении катетов a и b отношение площади нового дома к площади исходного будет минимальным.

Решение.



Если обозначить $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle CBA$, то $\angle A_1AA_2 = \dfrac{\pi}{2}+\alpha$, $\angle B_1BB_2 = \dfrac{\pi}{2}+\beta$. Поэтому площади треугольников A_1AA_2 и B_1BB_2 будут равны площади исходного трегольника ABC.

Треугольники C_1CC_2 и ABC равны (по двум катетам). Следовательно, равны их площади.

Итого, площадь всего шестиугольника равна

$$a^2+b^2+c^2+4\cdot\frac{ab}{2} = 2\left(a^2+b^2+ab\right).$$

Б) Осталось найти $\min\dfrac{a^2+b^2+ab}{ab} = \min\dfrac{a^2+b^2}{ab}+1$.

Пусть $b = ka$. Будем искать k. Получаем новую задачу поиска

$$\min\frac{1+k^2}{k} = \min\left(\frac{1}{k}+k\right).$$

Решение этой задачи известно. Сумма двух взаимно обратных величин всегда больше либо равна двум. Минимум (равный 2) достигается при $k = 1$.

Ответ. А) $S = 2\left(a^2+b^2+ab\right)$; Б) при $a = b$.

Задача 5

Прямоугольный параллелепипед $a\times b\times c$ составлен их кубиков со стороной 1. Сколько в нем можно выделить различных меньших параллелепипедов из таких кубиков?

Решение.

Параллелепипед однозначно определяется 3 ребрами, выходящими из одной вершины. Ребро фиксированного направления однозначно определяется 2 точками — началом и концом. Если есть $n+1$ точка, то упорядоченную (одно значение всегда меньше другого) пару различных точек из них можно выбрать $n(n+1)/2$ способами. Выбор ребра каждого из 3 направлений не зависит от выбора ребер других направлений, поэтому все такие количества перемножаются. Один из такого числа параллелепипедов совпадает с исходным, поэтому результат надо уменьшить на 1.

Ответ: $\dfrac{abc(a+1)(b+1)(c+1)}{8} - 1.$