11 класс

1. Известно, что свободный член a_0 многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами по модулю меньше 100, а $P(20) = P(16) = 2016$. Найдите a_0.

Решение. Можно записать $P(x) - 2016 = (x - 16)(x - 20)Q(x)$, где $Q(x)$- многочлен с целыми коэффициентами. Свободный член правой части равен $320k$, где k – целое число. Таким образом, $a_0 = 2016 - 320k$. Условию удовлетворяет только значение $k = 6$, $a_0 = 96$.

Ответ. $a_0 = 96$.

2. Найдите решение системы

$$\begin{cases} 5x^7 + 3y^2 + 5u + 4v^4 = -2 \\ 2x^7 + 8y^2 + 7u + 4v^4 = \frac{6^5}{3^4 \cdot 4^2} \\ 8x^7 + 2y^2 + 3u + 6v^4 = -6 \\ 5x^7 + 7y^2 + 7u + 8v^4 = \frac{8^3}{2^6 \cdot 4} \end{cases}$$

Решение.
Рассмотрим систему с такими же коэффициентами, но без степеней.
Сложим первое уравнение с четвертым, а второе – с третьим.

$$\begin{cases} 10(x + y) + 12(u + v) = 0 \\ 10(x + y) + 10(u + v) = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$y = -x, \qquad v = -u$$

Подставляя в предыдущую систему, имеем

$$\begin{cases} 2x + u = -2 \\ -6x + 3u = 6 \end{cases}$$

Следовательно, $u = 0$, $x = -1$ и, далее, $y = 1$, $v = 0$. Теперь, чтобы получить "настоящее" решение, остается вычислить корни соответствующих степеней из найденных величин.

Ответ. $\{x, y, u, v\} = \{-1, \pm 1, 0, 0\}$

3. В квадратной таблице из 2015 строк и столбцов расставлены положительные числа. Произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 2, а произведение чисел в любом квадрате 3x3 равно 1. Какое число стоит в центре таблицы?

Решение

Рассмотрим первые 3 строки таблицы. Из дополнительного условия следует, что если покрывать эти строки "встык" квадратами размера 3×3, двигаясь одновременно слева и справа навстречу, то 336-й квадрат слева и 336-й квадрат справа перекроются одним столбцом (т.к. $(336 \cdot 3) \cdot 2 = 2015 + 1$). Обозначим произведение чисел в этом столбике (их 3 штуки) через M.

Тогда произведение всех чисел в первых 3-х строках таблицы равно, с одной стороны, 2^3, а с другой стороны, $1/M$.

Таким образом, $M = \dfrac{1}{2^3}$.

Теперь рассмотрим средний (1008-й) столбец таблицы. Он аналогичным образом разбивается на $336 \cdot 2$ блоков по 3 элемента, которые перекрываются на центральном элементе таблицы (если двигаться сверху и снизу навстречу). Обозначим этот элемент C.

Произведение всех чисел этого столбца равно 2. Поэтому $2 = M^{2 \cdot 336}/C$.

Откуда $C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2^{2 \cdot 336 \cdot 3}} = 2^{-2017}$.

Ответ. в центре таблицы стоит число 2^{-2017}.

4. Числа $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ записаны в ряд. Средние арифметические любых трех соседних чисел равны. Найдите все значения α, при которых это возможно.

Решение. Обозначим данные 5 чисел через x_1, x_2, ..., x_5. По условию,

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_4 = a,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_5 = b,$$

Рассмотрим пару полученных равенств.

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin 2\alpha, \\ \cos\alpha = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Из первого $\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$, т.е. $\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha) = 0$

1. Если $\sin\alpha = 0$, то $\alpha = \pi n$. Тогда $\sin 2\alpha = \sin 2\pi n = 0 = \sin\alpha$. $\cos\alpha = \cos\pi n = (-1)^n$, $\cos 2\alpha = \cos 2\pi n = 1$. Следовательно, $(-1)^n = 1$, что может быть только при четных n. Таким образом, в первом случае получаем $\alpha = 2\pi k$.

2. Если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $2\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k$. Но тогда $\cos\alpha \neq \cos 2\alpha$. Таким образом, во втором случае решений нет.

Ответ. $\alpha = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Решите уравнение $2^{[\sin x]} = 3^{1-\cos x}$, в котором $[a]$ означает целую часть числа a.

Решение. Целое число $[\sin x]$ может принимать только значения $0, \pm 1$.

1) Если $[\sin x] = 0$, то $2^0 = 1$. Следовательно, $3^{1-\cos x} = 1$, откуда $\cos x = 1$. Решением этого уравнения являются $x = 2\pi n$. Заметим, что $\sin x = 0$ при таких x.

2) Если $[\sin x] = -1$, то $3^{1-\cos x} = 2^{-1} = 1/2$. Но $1 - \cos x \geqslant 0$, следовательно, $3^{1-\cos x} \geqslant 1$. Поэтому уравнение $3^{1-\cos x} = 1/2$ не имеет решений.

3) Если $[\sin x] = 1$, то $x = \pi/2 + 2\pi k$. При этих значениях $\cos x = 0$. При подстановке в уравнение это дает $2^1 = 3^1$, чего не может быть.

Ответ. $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.