11 класс. 7111

Задача 1. В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

Решение. Предположим, что какой-то завод X соединен автобусными маршрутами не более чем с 146 заводами. Тогда четверка заводов, состоящая из X и каких-то трех, с которыми он не соединен, не удовлетворяет условию задачи, поскольку X не может быть в паре ни с одним из трех оставшихся заводов. Поэтому каждый завод соединен хотя бы с 147 заводами. Следовательно, всего пар заводов, соединенных автобусными маршрутами, не меньше, чем $\frac{147\cdot 150}{2} = 11025$.

Покажем теперь, что может быть ровно 11025 пар заводов. Занумеруем заводы числами от 1 до 150 и соединим автобусными маршрутами все заводы, кроме первого и 150-го, а также заводов, номера которых отличаются на единицу. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый завод соединен автобусными маршрутами с 147 заводами, общее количество пар соединенных заводов в точности равно $\frac{147\cdot 150}{2} = 11025$.

Возьмем теперь любую четверку заводов. Возможны два случая.

1) Есть завод, не соединенный с двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A не соединен с заводами B и C, но соединен с заводом D. Тогда заводы B и C должны быть соединены между собой, так как остатки от деления их номеров на 150 различаются на 2. Поэтому пары (A,D) и (B,C) нам подходят.

2) Все заводы соединены с не менее чем двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A соединен с заводами B и C. По предположению завод D должен быть соединен с B или C. Если он соединен с B, то нам подойдут пары (A,C) и (B,D), а если с C, то пары (A,B) и (C,D).

Ответ: 11025.

Задача 2. Для числовой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ выполняются соотношения $2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$.

Решение. Имеем

$$x_n = (1/3)(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}).$$

Тогда x_0 — любое, и по индукции

$$x_n = x_0 4^{n-1}/3^n \text{ при } n \geq 1,$$

$$S_n = x_0(4/3)^n.$$

Ответ: $x_n = x_0 4^{n-1}/3^n$ при $n \geq 1$, $\quad S_n = x_0(4/3)^n$, x_0 — любое.

Задача 3. Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех 6 чисел равно A.

Решение. Запишем в ряд $a_1, \ldots, a_6$. Из условий

$$(1/3)(a_1 + a_2 + a_3) = (1/3)(a_2 + a_3 + a_4),$$

$$(1/3)(a_2 + a_3 + a_4) = (1/3)(a_3 + a_4 + a_5),$$

$$(1/3)(a_3 + a_4 + a_5) = (1/3)(a_4 + a_5 + a_6)$$

получаем $a_1 = a_4 = x,\ a_2 = a_5 = y,\ a_3 = a_6 = z$. Запись в ряд имеет вид

$$x, y, z, x, y, z \qquad (1).$$

Среди 6 чисел есть по крайней мере три пары равных. Из (1) следует, что неважно, какое из значений равно 1, без ограничения общности положим $z = 1$ и перепишем (1) в виде $x, y, 1, x, y, 1$. Из условия на их среднее арифметическое имеем $(1/6)(x + y + 1 + x + y + 1) = (1/3)(x + y + 1) = A$, откуда

$$y = 3A - 1 - x.$$

Обозначим $p = 3A - 1$, тогда $y = p - x$ и среднее геометрическое трех соседних чисел выражается как $g(x) = \sqrt[3]{x(p-x)}$. Функция $g(x)$ имеет максимум в той же точке, что и функция

$$f(x) = g^3(x) = x(p - x).$$

Это парабола, ее максимум достигается в вершине с координатами $(p/2,\ p^2/4)$. Таким образом, максимальное значение функции $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ есть

$$\sqrt[3]{p^2/4} = \sqrt[3]{(3A-1)^2/4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{(3A-1)^2/4}$.

Задача 4. Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax+b)+g(cx+d)$ $(a \neq c)$ имеет ровно один корень.

Решение. Пусть x_0 — единственный корень многочлена $g(x)$. Тогда функция $g(x)$ сохраняет знак во всех точках $x \neq x_0$ и только $g(x_0)=0$. Следовательно, корнем многочлена $f(x)=g(ax+b)+g(cx+d)$ является только такая точка x_1, что $ax_1+b=cx_1+d=x_0$. Получаем уравнение с параметрами

$$(a-c)x_1=(d-b).$$

Так как по условию $a \neq c$, то $x_1=(d-b)/(a-c)$,

$$x_0=a(d-b)/(a-c)+b=(ad-bc)/(a-c).$$

Ответ: $x_0=(ad-bc)/(a-c)$.

Задача 5. При благоустройстве городского сада «Пифагор» сначала были проложены три аллеи, образующие прямоугольный треугольник с острым углом α. Следующие аллеи проложили как внешние квадраты на сторонах этого треугольника (получилась фигура, иллюстрирующая теорему Пифагора и называемая пифагоровыми штанами). Наконец, на третьем этапе соединили прямолинейными аллеями центр наибольшего квадрата с вершиной прямого угла, а центры двух меньших квадратов друг с другом. Определите, какая из аллей третьего этапа имеет большую длину? При каком значении угла α их длины различаются сильнее всего?

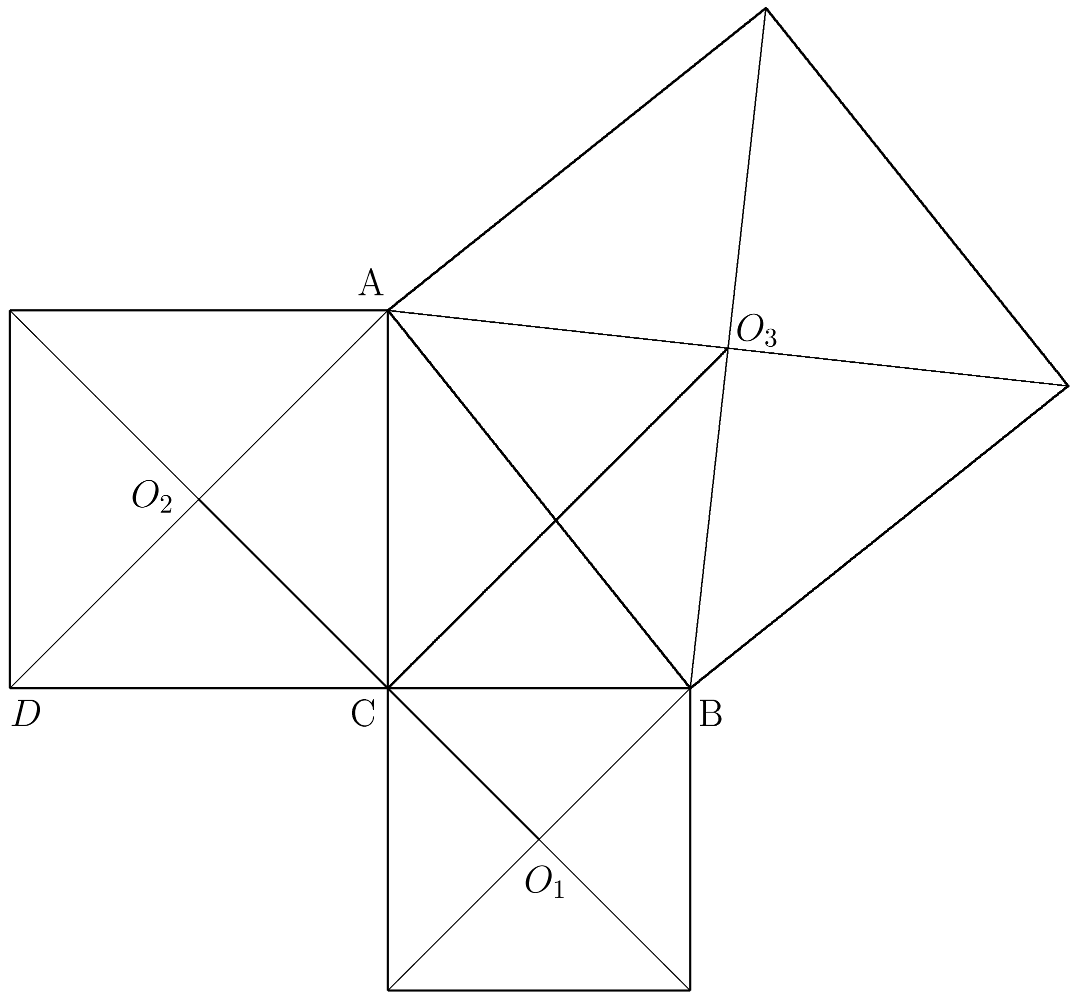
Решение. Обозначим исходный треугольник ABC (угол C – прямой), центры квадратов O_1, O_2, O_3, вершину одного из квадратов D (см. рис). Пусть угол A равен α.

Пусть стороны исходного треугольника, противолежащие вершинам A, B, C, имеют длины a, b, c соответственно.

$\angle O_2CA=\angle O_1CB=\pi/4$ (углы между диагональю и стороной квадрата), следовательно, отрезки O_2C и CO_1 лежат на одной прямой. Каждый из них равен половине диагонали своего квадрата. Значит,

$$O_1O_2=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Треугольники ABC и ABO_3 – прямоугольные, следовательно, они вписаны в одну и ту же окружность с диаметром AB. Таким образом, вписанные углы $\angle ACO_3$ и $\angle ABO_3$ опираются на одну и ту же дугу, т.е. они равны. Но $\angle ABO_3=\angle CDA=\pi/4$ (углы между диагональю и стороной квадрата). Следовательно, $\angle ACO_3=\angle CDA$.



$\angle DAB = \angle CAO_3$, т.к. каждый из них равен $\pi/4 + \angle CAB$. Таким образом, треугольники DAB и CAO_3 подобны. Отсюда $\dfrac{DA}{AC} = \dfrac{DB}{CO_3}$. Теперь можно найти

$$CO_3 = \frac{DB \cdot AC}{DA} = \frac{(a+b) \cdot b}{b\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Получается, что $O_1O_2 = CO_3$, каков бы ни был исходный прямоугольный $\triangle ABC$.

Ответ: $O_1O_2 = CO_3$ при любом значении α.