Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

9 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Андрей ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через час езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 20 мин. Тогда он резко увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 90 км/ч и приехал в аэропорт на 20 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Андрея до аэропорта?

Ответ: 180 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Андрея до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу, $1+t$ часов. Тогда

$$s = 60 + 60(t + \frac{1}{3}) = 60 + 90(t - \frac{1}{3}).$$

Отсюда $60t + 20 = 90t - 30$, $t = \frac{5}{3}$, $s = 180$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Пусть

$$\sqrt{49 - a^2} - \sqrt{25 - a^2} = 3.$$

Вычислите значение выражения

$$\sqrt{49 - a^2} + \sqrt{25 - a^2}.$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть

$$\sqrt{49 - a^2} + \sqrt{25 - a^2} = x.$$

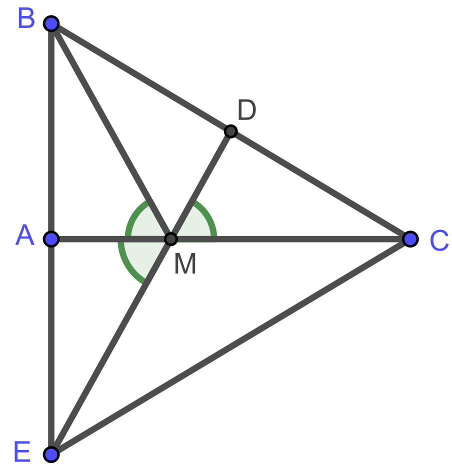
Перемножив это равенство с исходным, получим $24 = 3x$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

3. Пусть D — середина гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC. На катете AC выбрана такая точка M, что $\angle AMB = \angle CMD$. Найдите отношение $\dfrac{AM}{MC}$.

Ответ: $1 : 2$.

Решение. Пусть точка E — пересечение лучей BA и DM.



Тогда углы AME и CMD равны как вертикальные. Значит, равны и углы AMB и AME. Поэтому треугольники AMB и AME равны (по общей стороне AM и прилежащим к ней углам). Стало быть, $BA = EA$. Рассмотрим треугольник EBC. В нём точка M — пересечение медиан CA и ED. По свойству точки пересечения медиан, $AM : MC = 1 : 2$.

Оценивание. За полное решение 14 баллов.

4. Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7$. Найдите многочлен $g(x)$ наименьшей степени такой, что

$$f(3) = g(3), \quad f(3 - \sqrt{3}) = g(3 - \sqrt{3}), \quad f(3 + \sqrt{3}) = g(3 + \sqrt{3}).$$

Ответ: $12x^2 - 19x + 25$.

Решение. Рассмотрим многочлен $h(x) = g(x) - f(x)$. Он равен нулю в точках $x = 3$ и $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Поэтому $h(x)$ делится на многочлен

$$q(x) = (x - 3)(x - (3 + \sqrt{3}))(x - (3 - \sqrt{3})) =$$

$$= (x - 3)((x - 3)^2 - 3) = (x - 3)(x^2 - 6x + 6) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18,$$

то есть для некоторого многочлена $s(x)$ имеет место тождество

$$g(x) - f(x) = s(x) \cdot (x^3 - 9x^2 + 24x - 18),$$

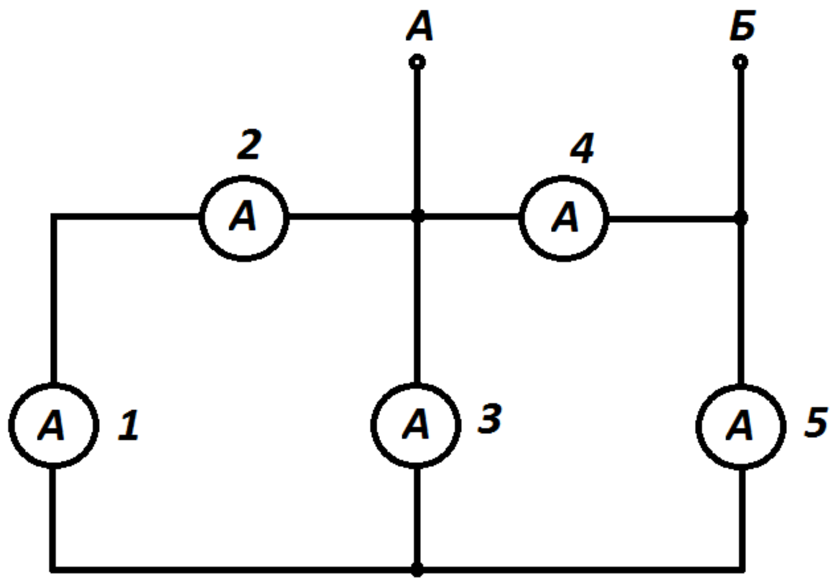
или

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7 + s(x) \cdot (x^3 - 9x^2 + 24x - 18).$$

При $s(x) = -1$ получим $g(x) = 12x^2 - 19x + 25$. При любом другом многочлене $s(x)$ степень $g(x)$ не меньше трёх.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. Если многочлен найден, но не доказана минимальность степени, 11 баллов.

5. (*10 баллов*) Пять одинаковых неидеальных амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам A и $Б$ подсоединяют идеальный источник питания. Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания первого амперметра $I_1 = 2\ мА$.



Ответ: $24\ мА$

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что: $I_2 = I_1 = 2\ мА$. **(2 балла)**

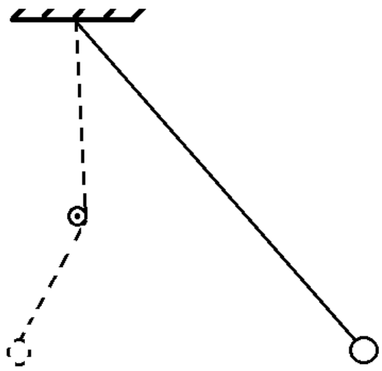
$$I_3 = 2I_1 = 4\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_5 = I_3 + I_1 = 6\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 10\ мА.$$ **(2 балла)**

Сумма показаний всех амперметров: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 24\ мА$. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и колеблется в плоскости, параллельной стене. В стену вбит тонкий гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия справа налево. Найдите длину нити, если период колебаний такого маятника (с помехой в виде гвоздя) $T = 2{,}41\ с$. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.



Ответ: $2\,м$

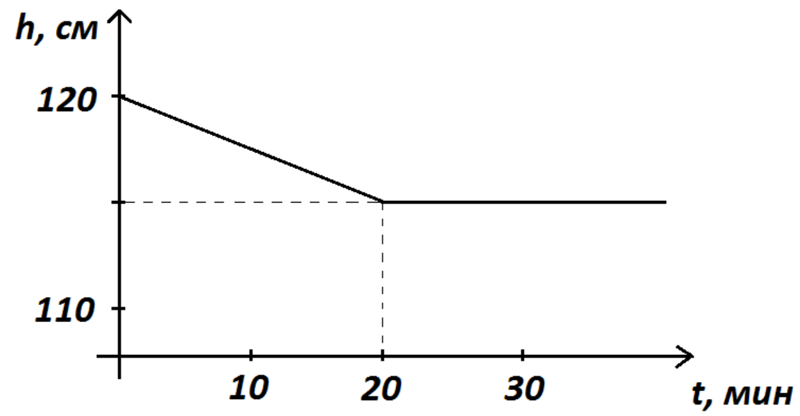
Решение. Период колебаний математического маятника длиной l определяется выражением $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. **(3 балла)**

А для маятника длиной $\dfrac{l}{2}$ период колебаний равен $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$. **(3 балла)**

Из условия задачи следует, что $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$. **(4 балла)**

В результате получаем $l = \dfrac{2T^2 g}{\pi^2(3+2\sqrt{2})} = 2\,м$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура $0\,°C$. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда $S = 15\,см^2$, плотность воды $\rho_в = 1\,г/см^3$, плотность льда $\rho_л = 0{,}9\,г/см^3$.



Ответ: масса льда – $675\,г$, масса воды – $1050\,г$

Решение. Изменение объёма воды в сосуде: $\Delta V = S\Delta h = 15\cdot 5 = 75\ см^3$.

(2 балла)

Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился. $\Delta V = V_Л - V_В = \dfrac{m_Л}{\rho_Л} - \dfrac{m_Л}{\rho_В}$. **(5 баллов)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_Л = \dfrac{\Delta V\cdot\rho_Л\cdot\rho_В}{\rho_В - \rho_Л} = 675\ г$. **(3 балла)**

Конечный объём воды в сосуде: $V_К = 115\cdot 15 = 1725\ см^3$. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды: $m_В = \rho_В V_К - m_Л = 1050\ г$. **(3 балла)**

8. (*10 баллов*) Имеются две лёгкие пружины равной длины, но с разными жёсткостями. Пружины поставили вертикально одна на другую. Сверху положили груз массой $m = 100\ г$. В результате, конструкция оказалась сжата на $x_1 = 12{,}5\ мм$. После этого пружины поставили рядом друг с другом и опять сверху положили тот же груз. В этом случае конструкция оказалась сжата на $x_2 = 2\ мм$. Найдите жёсткости пружин. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Ответ: $k_1 = 400\ \dfrac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\ \dfrac{Н}{м}$

Решение. В первой ситуации жёсткость получаемой конструкции $k_0 = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

(2 балла)

Условие равновесия в этом случае: $k_0 x_1 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \dfrac{mg}{x_1} = 80\ \dfrac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Во второй ситуации жёсткость получаемой конструкции $k_к = k_1 + k_2$. **(2 балла)**

Условие равновесия в этом случае: $k_к x_2 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $k_1 + k_2 = \dfrac{mg}{x_2} = 500\ \dfrac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Решая эту систему уравнений, получаем: $k_1 = 400\ \dfrac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\ \dfrac{Н}{м}$. **(2 балла)**

9 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Виктор ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через полчаса езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 15 мин. Тогда он увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 80 км/ч и приехал в аэропорт на 15 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Виктора до аэропорта?

Ответ: 150 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Виктора до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу $\frac{1}{2}+t$ часов. Тогда

$$s = 30 + 60(t + \frac{1}{4}) = 30 + 80(t - \frac{1}{4}).$$

Отсюда $60t + 15 = 80t - 20$, $t = \frac{7}{4}$, $s = 150$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Пусть

$$\sqrt{25 - a^2} - \sqrt{9 - a^2} = 3.$$

Вычислите значение выражения

$$\sqrt{25 - a^2} + \sqrt{9 - a^2}.$$

Ответ: 16/3.

Решение. Пусть

$$\sqrt{25 - a^2} + \sqrt{9 - a^2} = x.$$

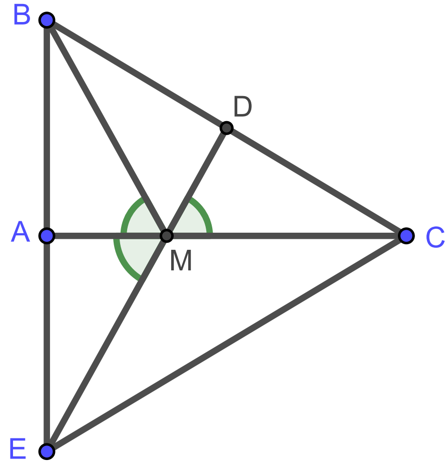
Перемножив это равенство с исходным, получим $16 = 3x$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

3. Пусть D — середина гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC. На катете AC выбрана такая точка M, что $\angle AMB = \angle CMD$. Найдите отношение $\dfrac{BM}{MD}$.

Ответ: 2 : 1.

Решение. Пусть точка E — пересечение лучей BA и DM.



Тогда углы AME и CMD равны как вертикальные. Значит, равны и углы AMB и AME. Поэтому треугольники AMB и AME равны (по общей стороне AM и прилежащим к ней углам). Стало быть, $BA = EA$. Рассмотрим треугольник EBC. В нём точка M — пересечение медиан CA и ED. По свойству точки пересечения медиан, $EM : MD = 2 : 1$. Но $BM = EM$ (из равенства треугольников AMB и AME). Отсюда ответ.

Оценивание. За полное решение 14 баллов.

4. Пусть $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$. Найдите многочлен $g(x)$ наименьшей степени такой, что

$$f(2) = g(2), \quad f(2-\sqrt{2}) = g(2-\sqrt{2}), \quad f(2+\sqrt{2}) = g(2+\sqrt{2}).$$

Ответ: $3x^2 - 5x - 3$.

Решение. Рассмотрим многочлен $h(x) = g(x) - f(x)$. Он равен нулю в точках $x = 2$ и $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Поэтому $h(x)$ делится на многочлен

$$q(x) = (x-2)(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2})) =$$

$$= (x-2)((x-2)^2-2) = (x-2)(x^2-4x+2) = x^3-6x^2+10x-4,$$

то есть для некоторого многочлена $s(x)$ имеет место тождество

$$g(x) - f(x) = s(x)\cdot(x^3-6x^2+10x-4),$$

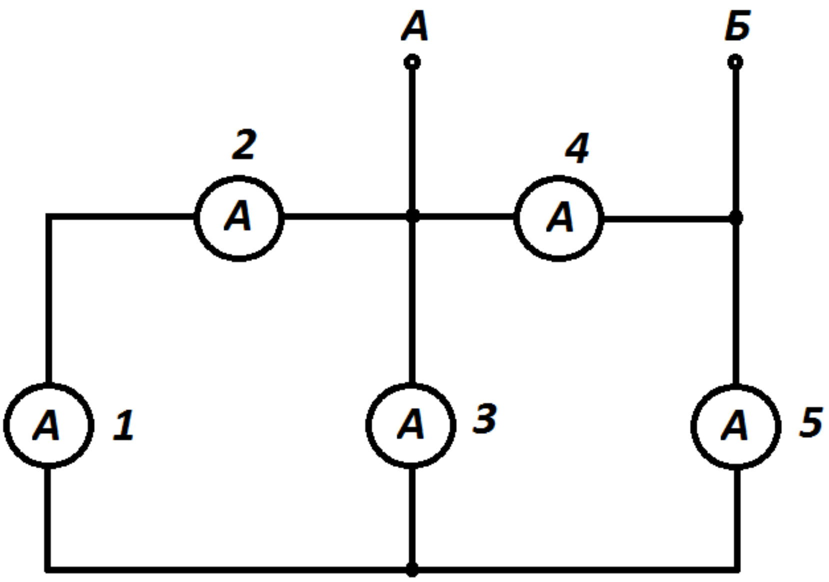
или

$$g(x) = x^3-3x^2+5x-7+s(x)\cdot(x^3-6x^2+10x-4).$$

При $s(x) = -1$ получим $g(x) = 3x^2-5x-3$. При любом другом многочлене $s(x)$ степень $g(x)$ не меньше трёх.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. Если многочлен найден, но не доказана минимальность степени, 11 баллов.

5. (*10 баллов*) Пять одинаковых амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам A и $Б$ подсоединяют идеальный источник питания. Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания второго амперметра $I_2 = 4\ мА$.



Ответ: $48\ мА$

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что $I_2 = I_1 = 4\ мА$. **(2 балла)**

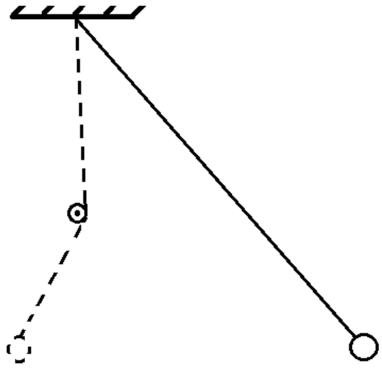
$$I_3 = 2I_2 = 8\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_5 = I_3 + I_2 = 12\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 20\ мА.$$ **(2 балла)**

Сумма показаний всех амперметров: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 48\ мА$. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и колеблется в плоскости, параллельной стене. В стену вбит тонкий гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия справа налево. Найдите период колебаний такого маятника, если длина его нити равна $l = 2\ м$. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.



Ответ: $\approx 2{,}4\,c$

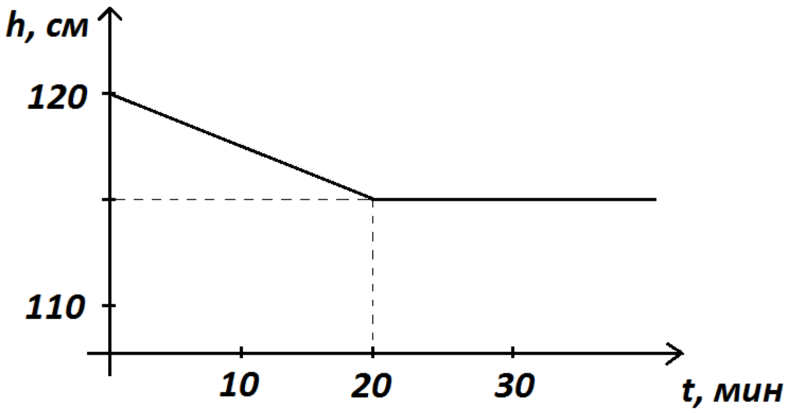
Решение. Период колебаний математического маятника длиной l определяется выражением $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. **(3 балла)**

А для маятника длиной $\dfrac{l}{2}$ период колебаний: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$. **(3 балла)**

Из условия задачи следует, что $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$. **(4 балла)**

В результате получаем $T = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}\cdot\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 2{,}4\,c$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура $0\,°C$. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда $S = 15\,см^2$, плотность воды $\rho_в = 1\,г/см^3$, плотность льда $\rho_л = 0{,}9\,г/см^3$.



Ответ: масса льда – $675\,г$, масса воды – $1050\,г$

Решение. Изменение объёма воды в сосуде $\Delta V = S\Delta h = 15 \cdot 5 = 75\ см^3$. (**2 балла**)

Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился. $\Delta V = V_Л - V_В = \frac{m_Л}{\rho_Л} - \frac{m_Л}{\rho_В}$. **(5 баллов)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_Л = \frac{\Delta V \cdot \rho_Л \cdot \rho_В}{\rho_В - \rho_Л} = 675\ г$. **(3 балла)**

Конечный объем воды в сосуде: $V_К = 115 \cdot 15 = 1725\ см^3$. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды $m_В = \rho_В V_К - m_Л = 1050\ г$. **(3 балла)**

8. (*10 баллов*) Имеются две легкие пружины равной длины, но с разными жёсткостями. Пружины поставили вертикально одна на другую. Сверху положили груз массой $m = 3\ кг$. В результате, конструкция оказалась сжата на $x_1 = 40\ см$. После этого пружины поставили рядом друг с другом и опять сверху положили тот же груз. В этом случае конструкция оказалась сжата на $x_2 = 7{,}5\ см$. Найдите жёсткости пружин. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Ответ: $k_1 = 300\ \frac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\ \frac{Н}{м}$

Решение. В первой ситуации жёсткость получаемой конструкции:

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$ **(2 балла)**

Условие равновесия в этом случае: $k_0 x_1 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{mg}{x_1} = 75\ \frac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Во второй ситуации жёсткость получаемой конструкции: $k_к = k_1 + k_2$ **(2 балла)**

Условие равновесия в этом случае: $k_к x_2 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $k_1 + k_2 = \frac{mg}{x_2} = 400\ \frac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Решая эту систему уравнений, получаем: $k_1 = 300\ \frac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\ \frac{Н}{м}$. **(2 балла)**