Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

8 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Андрей ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через час езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 20 мин. Тогда он резко увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 90 км/ч и приехал в аэропорт на 20 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Андрея до аэропорта?

Ответ: 180 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Андрея до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу, $1+t$ часов. Тогда

$$s = 60 + 60(t + \frac{1}{3}) = 60 + 90(t - \frac{1}{3}).$$

Отсюда

$$60t + 20 = 90t - 30, \quad t = \frac{5}{3}, \quad s = 180.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. На доске написано 2019 чисел. Одно из них встречается чаще других — 10 раз. Какое наименьшее количество различных чисел может быть записано на доске?

Ответ: 225.

Решение. Пусть на доске записано k различных чисел. Одно из них встречается 10 раз, а остальные не более 9 раз. Отсюда

$$10 + 9(k-1) \geqslant 2019, \quad 9k \geqslant 2018, \quad k \geqslant 225.$$

Пример: одно число записано 10 раз, 223 числа по 9 раз и ещё одно два раза.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. За оценку без примера 6 б. За пример без оценки 5 б.

3. Можно ли отпилить от кубика с ребром в 15 см уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 5, 6 и 8 см?

Ответ: нет.

Решение. Задача сводится к следующей. Существует ли треугольная пирамида с прямыми углами при вершине, в основании которой треугольник со сторонами 5, 6 и 8?

Пусть длины боковых рёбер a, b и c. Тогда, по теореме Пифагора, имеем

$$a^2 + b^2 = 25, \quad b^2 + c^2 = 36, \quad c^2 + a^2 = 64.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 + c^2 = (25 + 36 + 64)/2 = 61{,}5 < 64 = a^2 + c^2.$$

Противоречие!

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

4. Натуральное число n таково, что у числа $36n^2$ ровно 51 разных натуральных делителей. Сколько натуральных делителей у числа $5n$?

Ответ: 16.

Решение. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — попарно различные простые числа. Тогда количество натуральных делителей числа m равно

$$\tau(m) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_l + 1). \qquad (*)$$

Действительно, общий делитель числа m имеет вид

$$d = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{a_l},$$

где для каждого i показатель степени a_i принимает значения от 0 до k_i — всего $k_i + 1$ значений. По правилу произведения получаем формулу $(*)$.

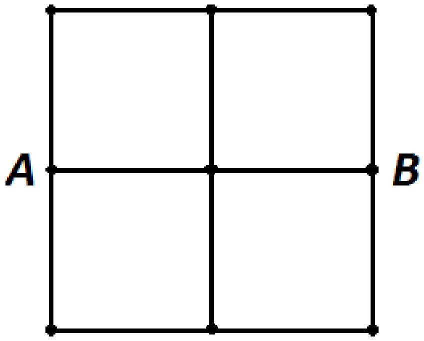
Число $m = 36n^2$ имеет хотя бы два простых делителя (2 и 3).

Учитывая равенство $\tau(m) = 3 \cdot 17$, получаем в формуле $(*)$ два множителя. Поэтому число m имеет вид $m = 2^2 3^{16}$ или $m = 2^{16} 3^2$. При этом $n = p^7$, где p равно 2 или 3. Тогда

$$5n = 5p^7, \quad \tau(5n) = 2 \cdot 8 = 16.$$

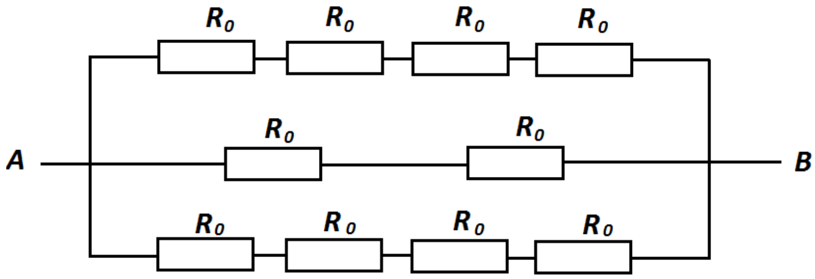
Оценивание. За полное решение 13 баллов. Формулу $(*)$ участники олимпиады могут использовать без доказательства.

5. (*10 баллов*) Определите сопротивление R проволочного контура, показанного на рисунке, между точками A и B. Известно, что расстояние между этими точками $2\,м$. Сопротивление одного метра проволоки, из которой сделан контур, равно $R_0 = 10\,Ом$.



Ответ: $R = 10\,Ом$

Решение. Напряжение на средних вертикальных перемычках всегда равно нулю.**(3 балла)** Следовательно, эквивалентная схема:



(3 балла)

Её сопротивление: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{4R_0} + \dfrac{1}{2R_0} + \dfrac{1}{4R_0} = \dfrac{1}{R_0}$. **(2 балла)**

Окончательный ответ: $R = 10\,Ом$. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) Снежок с температурой $0\,°C$ запущен со скоростью v в сторону стенки. При ударе расплавилось $k = 0{,}02\,\%$ от всего снежка. Определите, сколько процентов снежка расплавится, если его запустить в сторону стенки со скоростью $2v$? Удельная теплота плавления снега $\lambda = 330\,кДж/кг$. Считайте, что вся выделяемая при ударе энергия пошла на плавление.

Ответ: $n = 0{,}08\,\%$

Решение. Закон сохранения энергии в первом случае: $\frac{mv^2}{2} = \lambda \frac{km}{100}$. **(3 балла)**

То есть скорость снежка: $v = \sqrt{\frac{\lambda k}{50}} = \sqrt{132}\ м/с$. **(2 балла)**

Во втором случае: $\frac{m(2v)^2}{2} = \lambda \frac{nm}{100}$. **(3 балла)**

Окончательно получаем: $n = 0{,}08\,\%$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой $m = 50\ г$. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_п = 0{,}9\ г/см^3$, плотность солёного льда $\rho_с = 0{,}95\ г/см^3$, плотность пресной воды $\rho_{пв} = 1\ г/см^3$. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: $\approx 2{,}63\ см^3$

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$\rho_{св} g V_{погр} = \rho_п g V_1 = mg$, **(4 балла)**

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

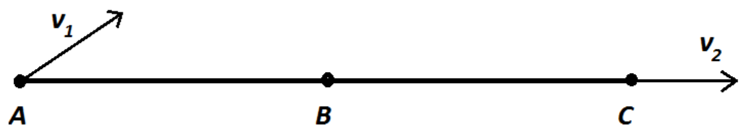
$\rho_с g V_{погр} = \rho_с g V_2 = mg$, **(4 балла)**

где V_2 – весь объём солёного льда. Солёный лёд при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$. Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана: $V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}\right) \cdot \frac{\rho_п}{\rho_{пв}} \approx 2{,}63\ см^3$. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня $v_1 = 5\ м/с$, а скорость другого $v_2 = 4\ м/с$ и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: $\approx 4{,}3\ м/с$

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{верт\ A} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 3\ м/с$. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$$v_{верт\ B} = \frac{1}{2} v_{верт\ A} = 1{,}5\ м/с.$$ **(4 балла)**

Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{верт\ B}^2} = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} \approx 4{,}3\ м/с$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

8 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Виктор ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через полчаса езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 15 мин. Тогда он увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 80 км/ч и приехал в аэропорт на 15 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Виктора до аэропорта?

Ответ: 150 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Виктора до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу $\frac{1}{2}+t$ часов. Тогда

$$s = 30 + 60(t + \frac{1}{4}) = 30 + 80(t - \frac{1}{4}).$$

Отсюда

$$60t + 15 = 80t - 20, \quad t = \frac{7}{4}, \quad s = 150.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. На доске написано 1235 чисел. Одно из них встречается чаще других — 10 раз. Какое наименьшее количество различных чисел может быть записано на доске?

Ответ: 138.

Решение. Пусть на доске записано k различных чисел. Одно из них встречается 10 раз, а остальные не более 9 раз. Отсюда

$$10 + 9(k-1) \geqslant 1235, \quad 9k \geqslant 1234, \quad k \geqslant 138.$$

Пример: одно число записано 10 раз, 136 чисел по 9 раз и ещё одно число один раз.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. За оценку без примера 6 б. За пример без оценки 5 б.

3. Можно ли отпилить от кубика с ребром в 20 см уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 7, 8 и 11 см?

Ответ: нет.

Решение. Задача сводится к следующей. Существует ли треугольная пирамида с прямыми углами при вершине, в основании которой треугольник со сторонами 7, 8 и 11?

Пусть длины боковых рёбер a, b и c. Тогда, по теореме Пифагора, имеем

$$a^2 + b^2 = 49, \quad b^2 + c^2 = 64, \quad c^2 + a^2 = 121.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 + c^2 = (49 + 64 + 121)/2 = 117 < 121 = a^2 + c^2.$$

Противоречие!

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

4. Натуральное число n таково, что у числа $100n^2$ ровно 55 разных натуральных делителей. Сколько натуральных делителей у числа $10n$?

Ответ: 18.

Решение. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — попарно различные простые числа. Тогда количество натуральных делителей числа m равно

$$\tau(m) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_l + 1). \qquad (*)$$

Действительно, общий делитель числа m имеет вид

$$d = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{a_l},$$

где для каждого i показатель степени a_i принимает значения от 0 до k_i — всего $k_i + 1$ значений. По правилу произведения получаем формулу $(*)$.

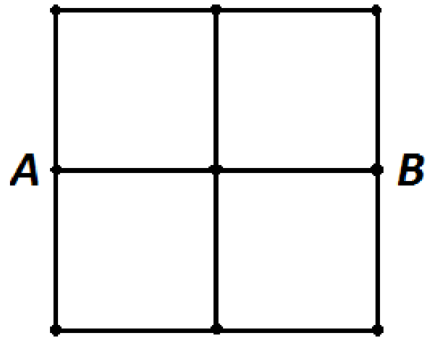
Число $m = 100n^2$ имеет хотя бы два простых делителя (2 и 5).

Учитывая равенство $\tau(m) = 5 \cdot 11$, получаем в формуле $(*)$ два множителя. Поэтому число m имеет вид $m = 2^4 5^{10}$ или $m = 2^{10} 5^4$. При этом $n = pq^4$, где $p = 2$, $q = 5$ или $p = 5$, $q = 2$. Тогда

$$10n = p^2 q^5, \quad \tau(10n) = 3 \cdot 6 = 18.$$

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Формулу $(*)$ участники олимпиады могут использовать без доказательства.

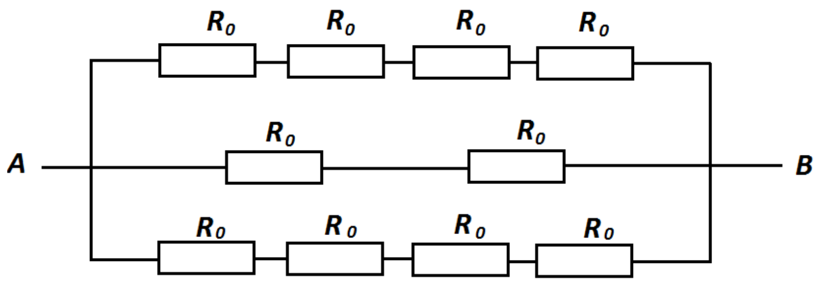
5. (*10 баллов*) Сопротивление проволочного контура, показанного на рисунке, между точками A и B равно $R = 15\,Ом$. Известно, что расстояние между этими точками $2\,м$. Найдите сопротивление R_0 одного метра проволоки, из которой сделан контур.



Ответ: $R_0 = 15\,Ом$

Решение. Напряжение на средних вертикальных перемычках всегда равно нулю. **(3 балла)**

Следовательно, эквивалентная схема:



(3 балла)

Её сопротивление: $\frac{1}{R} = \frac{1}{4R_0} + \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{4R_0} = \frac{1}{R_0}$. **(2 балла)**

Окончательный ответ: $R_0 = 15\,Ом$. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) Снежок с температурой $0\,°C$ запущен со скоростью v в сторону стенки. При ударе расплавилось $k = 0{,}02\,\%$ от всего снежка. Определите, сколько процентов снежка расплавится, если его запустить в сторону стенки со скоростью $\frac{v}{2}$? Удельная теплота плавления снега

$\lambda = 330\ кДж/кг$. Считайте, что вся выделяемая при ударе энергия пошла на плавление.

Ответ: $n = 0{,}005\ \%$

Решение. Закон сохранения энергии в первом случае: $\frac{mv^2}{2} = \lambda \frac{km}{100}$. **(3 балла)**

То есть скорость снежка: $v = \sqrt{\frac{\lambda k}{50}} = \sqrt{132}\ м/с$. (2 **балла)**

Во втором случае: $\frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \lambda \frac{nm}{100}$. **(3 балла)**

Окончательно получаем: $n = 0{,}005\ \%$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой $m = 100\ г$. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_п = 0{,}9\ г/см^3$, плотность солёного льда $\rho_с = 0{,}95\ г/см^3$, плотность пресной воды $\rho_{пв} = 1\ г/см^3$. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: $\approx 5{,}26\ см^3$

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$\rho_{св} g V_{погр} = \rho_п g V_1 = mg$, **(4 балла)**

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

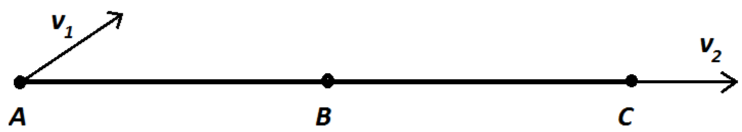
$\rho_с g V_{погр} = \rho_с g V_2 = mg$, **(4 балла)**

где V_2 – весь объём солёного льда. Солёный лёд при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$. Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана: $V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_n} - \frac{m}{\rho_c}\right) \cdot \frac{\rho_n}{\rho_{пв}} \approx 5,26\ см^3.$$ **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня $v_1 = 10\ м/с$, а скорость другого $v_2 = 6\ м/с$ и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: $\approx 7,2\ м/с$

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{верт\ A} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 8\ м/с$. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$$v_{верт\ B} = \frac{1}{2} v_{верт\ A} = 4\ м/с.$$ **(4 балла)**

Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{верт\ B}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7,2\ м/с$. **(3 балла)**