Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

7 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 100 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 10 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 10 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 100 м (Вася за это время пробежит 90 м). До финиша остаётся 10 м — в 10 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 10 раз меньше, т. е. 1 м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. По кругу стоят 15 чисел. Сумма любых шести последовательных чисел равна 50. Петя закрыл карточкой одно из чисел. Два соседних с карточкой числа 7 и 10. Какое число под карточкой?

Ответ: 8.

Решение. Пусть на i-м месте стоит число a_i ($i = 1, \ldots, 15$.) Зафиксируем 5 подряд идущих чисел. Числа слева и справа от этой пятёрки должны совпасть. Поэтому $a_i = a_{i+6}$. Пойдём по кругу, отмечая одинаковые числа:

$$a_1 = a_7 = a_{13} = a_4 = a_{10} = a_1.$$

Теперь видно, что для любого i верно, что $a_i = a_{i+3}$, т. е. числа идут в таком порядке:

$$a, b, c, a, b, c, \ldots, a, b, c.$$

Из условия следует, что

$$2(a + b + c) = 50.$$

Значит, сумма любых трёх соседних чисел равна 25. Отсюда ответ.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

3. Пусть d — наибольший общий делитель восьми натуральных чисел, сумма которых равна 595. Какое наибольшее значение может принимать d?

Ответ: 35.

Решение. Если каждое из чисел делится на d, то и их сумма кратна d. Значит, d — делитель числа 595. Разложим последнее на простые множители: $595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$ и выпишем все его делители:

$$1, 5, 7, 17, 35, 85, 119, 595. \qquad (*)$$

Каждое из восьми чисел (из условия задачи) не меньше d. Поэтому их сумма, равная 595, не меньше $8d$. Из неравенства $595 \geqslant 8d$ получаем $d \leqslant 74$. Из списка $(*)$ наибольшее возможное значение 35.

Несложно придумать и соответствующий пример (он далеко не единственный): пусть семь чисел равны 70, а ещё одно 105.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. За оценку без примера 7 б. За пример без оценки 6 б.

4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 123 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой?

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*10 баллов*) Расстояние от дома до работы $s = 3км$. В тот момент времени, когда Иван вышел с работы, из дома выскочил его любимый пёс и побежал навстречу хозяину. На расстоянии четверти всего пути от работы они встретились. Пес мгновенно развернулся обратно и побежал домой. Добежав до дома, он опять мгновенно развернулся и побежал к хозяину и т.д. Считая, что Иван и его пес двигаются с постоянными скоростями, определите расстояние, которое пробежит пес к моменту времени, когда Иван придет домой.

Ответ: $9\,км$

Решение. К моменту первой встречи Иван прошёл одну четвертую всего пути. Следовательно, пёс пробежал три четвертых от всего расстояния. Т.е. скорость пса в три раза больше скорости Ивана: $v_п = 3v_и$. **(4 балла)**

По пути с работы домой Иван прошел $3\,км$. **(3 балла)**

Следовательно, пёс пробежал $l = 3 \cdot 3\,км = 9\,км$. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Жёсткая доска массой m и длиной $l = 20\,м$ частично лежит на краю горизонтальной поверхности, свисая с неё на три четверти своей длины. Чтобы доска не упала, на самом её краю положили камень массой $2m$. Насколько далеко от камня сможет по доске пройти человек массой $m/2$. Размерами камня и человека по сравнению с размерами доски пренебречь.

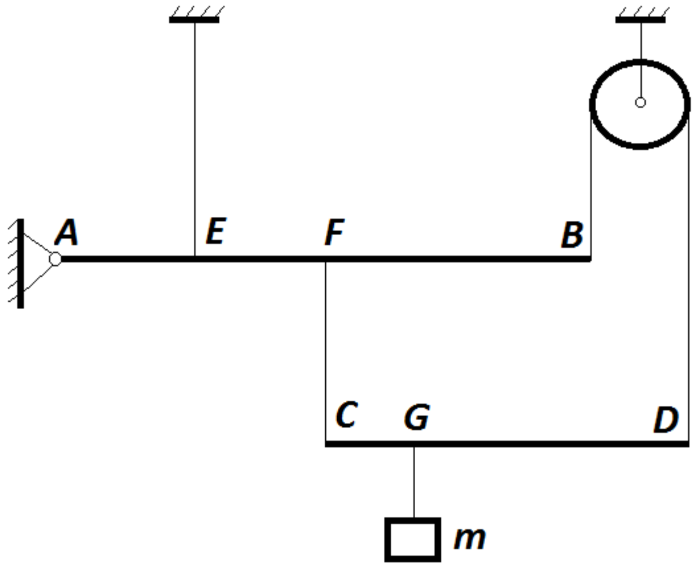
Ответ: $15\,м$

Решение. Правило моментов: $2mg \cdot \frac{l}{4} = mg \cdot \frac{l}{4} + \frac{m}{2} g \cdot \left(x - \frac{l}{4} \right)$. **(5 баллов)**

В результате, получаем $x = \frac{3}{4} l = 15\,м$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Конструкция состоит из двух невесомых стержней AB и CD, невесомого блока и груза массой $m = 2\,кг$, который подвешен в точке G. Все нити невесомые и нерастяжимые. В точке A стержень присоединен к шарниру, который позволяет стержню поворачиваться в плоскости рисунка. При этом $CG = \frac{1}{4} CD$, $AE = \frac{1}{4} AB$, а точка F является серединой стержня AB.

Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$. Определите силу натяжения T_0 нити, прикрепленной к стержню AB в точке E.



Ответ: $T_0 = 10\ Н$

Решение. Правило моментов для стержня CD относительно точки C:

$$mg \cdot \frac{1}{4} CD = T_2 \cdot CD.$$ **(4 балла)**

Сила натяжения нити BD: $T_2 = \frac{1}{4} mg = 5\ Н$. **(3 балла)**

Следовательно, сила натяжения нити CF: $T_1 = \frac{3}{4} mg = 15\ Н$. **(3 балла)**

Правило моментов для стержня AB относительно точки A:

$$T_0 \cdot \frac{1}{4} AB + T_2 \cdot AB = T_1 \cdot \frac{1}{2} AB.$$ **(3 балла)**

В результате получаем, $T_0 = 10\ Н$. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Масса сосуда, который полностью заполнили керосином, $31\ кг$. Если этот сосуд полностью заполнить водой, то его масса окажется равной $33\ кг$. Определите массу пустого сосуда. Плотность воды $\rho_В = 1000\ кг/м^3$, плотность керосина $\rho_К = 800\ кг/м^3$.

Ответ: $23\,кг$

Решение. Масса сосуда заполненного керосином $m_1 = m_c + \rho_K V$, **(4 балла)**

где m_c – масса пустого сосуда, V – объём занятый керосином. Масса сосуда заполненного водой: $m_2 = m_c + \rho_B V$. **(4 балла)**

Получаем, что $V = \dfrac{m_2 - m_1}{\rho_B - \rho_K} = \dfrac{33-31}{1000-800} = 0{,}01\,м^3$. **(4 балла)**

Масса пустого сосуда: $m_c = m_1 - \rho_K V = 31 - 800 \cdot 0{,}01 = 23\,кг$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

7 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 60 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 9 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 9 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1,35 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 60 м (Вася за это время пробежит 51 м). До финиша остаётся 9 м — в 20/3 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 20/3 раз меньше, т. е. $9 \cdot \frac{3}{20} = 1{,}35$ м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. По кругу стоят 20 чисел. Известно, что сумма любых шести соседних чисел равна 24. Какое число на 12-м месте, если на 1-м месте стоит число 1?

Ответ: 7.

Решение. Пусть на i-м месте стоит число a_i $(i = 1, \dots, 20.)$ Зафиксируем 5 подряд идущих чисел. Числа слева и справа от этой пятёрки должны совпасть. Поэтому $a_i = a_{i+6}$. Пойдём по кругу, отмечая одинаковые числа:

$$a_1 = a_7 = a_{13} = a_{19} = a_5 = a_{11} = a_{17} = a_3 = a_9 = a_{15} = a_1.$$

Теперь видно, что все числа на нечётных местах равны друг другу. То же верно для чисел на чётных местах. Значит, числа идут так:

$$x, y, x, y, \dots, x, y.$$

Из условия следует, что

$$3(x + y) = 24, \quad x = 1.$$

Отсюда $y = 7$. Значит, на нечётных местах единицы, а на чётных семёрки.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

3. Пусть d — наибольший общий делитель десяти натуральных чисел, сумма которых равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать d?

Ответ: 91.

Решение. Если каждое из чисел делится на d, то и их сумма кратна d. Значит, d — делитель числа 1001. Разложим последнее на простые множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и выпишем все его делители:

$$1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001. \qquad (*)$$

Каждое из десяти чисел (из условия задачи) не меньше d. Поэтому их сумма, равная 1001, не меньше $10d$. Из неравенства $1001 \geqslant 10d$ получаем $d \leqslant 101$. Из списка $(*)$ наибольшее возможное значение 91.

Несложно придумать и соответствующий пример (он единственный): девять чисел равны 91, а ещё одно 182.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. За оценку без примера 7 б. За пример без оценки 6 б.

4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 33 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой??

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*10 баллов*) Расстояние от дома до работы $s = 6км$. В тот момент времени, когда Иван вышел с работы, из дома выскочил его любимый пёс и побежал навстречу хозяину. На расстоянии одной трети всего пути от работы они встретились. Пёс мгновенно развернулся обратно и побежал домой. Добежав до дома, он опять мгновенно развернулся и побежал к хозяину и т.д. Считая, что Иван и его пёс двигаются с постоянными скоростями, определите расстояние, которое пробежит пёс к моменту времени, когда Иван придет домой.

Ответ: $12\,км$

Решение. К моменту первой встречи Иван прошел одну треть всего пути. Следовательно, пёс пробежал две трети от всего расстояния. То есть скорость пса в два раза больше скорости Ивана $v_п = 2v_и$. **(4 балла)**

По пути с работы домой Иван прошёл $6\,км$. **(3 балла)**

Следовательно, пёс пробежал $l = 2 \cdot 6\,км = 12\,км$. **(3 балла)**

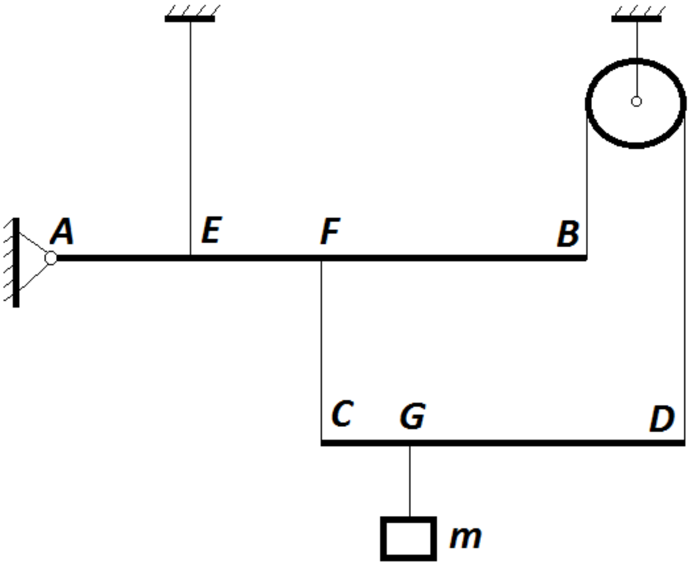
6. (*10 баллов*) Жёсткая доска массой m и длиной $l = 24\,м$ частично лежит на краю горизонтальной поверхности, свисая с неё на две трети своей длины. Чтобы доска не упала, на самом её краю положили камень массой $2m$. Насколько далеко от камня сможет по доске пройти человек массой m. Размерами камня и человека по сравнению с размерами доски пренебречь.

Ответ: $20\,м$

Решение. Правило моментов: $2mg \cdot \frac{l}{3} = mg \cdot \frac{l}{6} + mg \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right)$. **(5 баллов)**

В результате, получаем $x = \frac{5}{6}l = 20\,м$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Конструкция состоит из двух невесомых стержней AB и CD, невесомого блока и груза массой $m = 3\,кг$, который подвешен в точке G. Все нити невесомые и нерастяжимые. В точке A стержень присоединен к шарниру, который позволяет стержню поворачиваться в плоскости рисунка. При этом $CG = \frac{1}{4}CD$, $AE = \frac{1}{4}AB$, а точка F является серединой стержня AB. Ускорение свободного падения $g = 10\,м/с^2$. Определите силу натяжения T_0 нити, прикрепленной к стержню AB в точке E.



Ответ: $T_0 = 15\ H$

Решение. Правило моментов для стержня CD относительно точки C:

$mg \cdot \frac{1}{4} CD = T_2 \cdot CD.$ **(4 балла)**

Сила натяжения нити BD: $T_2 = \frac{1}{4} mg = 7{,}5\ H$. **(3 балла)**

Следовательно, сила натяжения нити CF: $T_1 = \frac{3}{4} mg = 22{,}5\ H$. **(3 балла)**

Правило моментов для стержня AB относительно точки A:

$T_0 \cdot \frac{1}{4} AB + T_2 \cdot AB = T_1 \cdot \frac{1}{2} AB.$ **(3 балла)**

В результате получим $T_0 = 15\ H$. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Масса сосуда, который полностью заполнили керосином, $20\ кг$. Если этот сосуд полностью заполнить водой, то его масса окажется равной $24\ кг$. Определите массу пустого сосуда. Плотность воды $\rho_B = 1000\ кг/м^3$, плотность керосина $\rho_K = 800\ кг/м^3$.

Ответ: $4\ кг$

Решение. Масса сосуда заполненного керосином: $m_1 = m_c + \rho_K V$, **(4 балла)**

где m_c – масса пустого сосуда, V – объём занятый керосином.

Масса сосуда заполненного водой $m_2 = m_c + \rho_B V$. **(4 балла)**

Получаем, что $V = \dfrac{m_2 - m_1}{\rho_B - \rho_K} = \dfrac{24 - 20}{1000 - 800} = 0{,}02\ м^3$. **(4 балла)**

Масса пустого сосуда: $m_c = m_1 - \rho_K V = 20 - 800 \cdot 0{,}02 = 4\ кг$. **(3 балла)**