



# Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

## Отборочный этап

11 класс

2018-2019

### Вариант 1

#### Задания, ответы и критерии оценивания

1. (16 баллов) Имеются две окружности: с центром в точке  $A$  и радиусом 6 и с центром в точке  $B$  и радиусом 3. Их общая внутренняя касательная касается окружностей соответственно в точках  $C$  и  $D$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите  $CD$ , если  $AE=10$ .

**Ответ: 12**

**Решение.** Треугольники  $ACE$  и  $BDE$  подобны (у них есть вертикальные углы и по прямому углу) с коэффициентом подобия 2. Из треугольника  $ACE$ , по теореме Пифагора, находим  $CE=8$ . Отсюда,  $DE=4$ , а  $CD=12$ .

2. (17 баллов) Найдите наибольший корень уравнения

$$|\cos(\pi x) + x^3 - 3x^2 + 3x| = 3 - x^2 - 2x^3.$$

**Ответ: 1**

**Решение.** Очевидно, что 1 – корень уравнения (при  $x=1$  обе части уравнения равны нулю). Если же  $x>1$ , правая часть уравнения отрицательна, в то время как левая часть уравнения всегда неотрицательна.

3. (17 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, которое одновременно является удвоенным точным квадратом и утроенным точным кубом.

**Ответ: 648**

**Решение.** Имеем  $k = 3n^3 = 2m^2$ . Отсюда числа  $m$  и  $n$  можно представить в виде  $n = 2a$ ,  $m = 3b$ . После подстановки получим  $4a^3 = 3b^2$ . Далее имеем  $a = 3c$ ,  $b = 2d$ ,  $9c^3 = d^2$ . Здесь наименьшее решение  $c=1$ ,  $d=3$ . Тогда  $a=3$ ,  $b=6$ ,  $n=6$ ,  $m=18$ ,  $k=648$ .

4. (15 баллов) КПД идеальной тепловой машины равен 40%. Каким он станет, если температуру нагревателя увеличить на 40%, а температуру холодильника уменьшить на 40%?

**Ответ:  $\approx 74\%$ .**

**Решение.** КПД идеальной тепловой машины:  $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H}$ . То есть в начале отношение температур холодильника и нагревателя:  $\frac{T_X}{T_H} = 1 - 0,4 = 0,6$ . После изменений:

$$\eta_2 = 1 - \frac{0,6T_X}{1,4T_H} = 1 - \frac{0,6 \cdot 0,6}{1,4} \approx 0,74 \approx 74 \%$$

**5. (20 баллов)** Точечный источник света располагается на одинаковом расстоянии  $x = 10$  см от линзы и её главной оптической оси. Его прямое изображение расположено на расстоянии  $y = 5$  см от главной оптической оси. Определите оптическую силу линзы и расстояние между источником света и его изображением.

**Ответ:**  $-10$  Дптр и  $\approx 7,1$  см

**Решение.** Изображение прямое, следовательно, оно мнимое. Увеличение:

$\Gamma = \frac{y}{x} = \frac{f}{d}$ . Получаем, что расстояние от линзы до изображения:

$f = d \cdot \frac{y}{x} = 10 \cdot \frac{5}{10} = 5$  см. Оптическая сила линзы:

$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,05} = -10$  Дптр. Расстояние между источником и его

изображением:  $s = \sqrt{(x-y)^2 + (d-f)^2} = \sqrt{50} \approx 7,1$  см.

**6. (15 баллов)** Бак массой  $m_1 = 2$  кг покоится на тележке массой  $m_2 = 10$  кг, которую разгоняют с ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>. Коэффициент трения между баком и тележкой  $\mu = 0,6$ . Определите силу трения, действующую на бак со стороны тележки.

**Ответ:**  $10$  Н

**Решение.** При данных условиях речь идет о силе трения покоя. По второму закону Ньютона:  $F_{тр} = m_1 a = 10$  Н.



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»  
по естественным наукам

Отборочный этап

11 класс

2018-2019

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (16 баллов) Имеются две окружности: с центром в точке  $A$  и радиусом 5 и с центром в точке  $B$  и радиусом 15. Их общая внутренняя касательная касается окружностей соответственно в точках  $C$  и  $D$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите  $CD$ , если  $BE=39$ .

**Ответ: 48**

**Решение.** Треугольники  $ACE$  и  $BDE$  подобны (у них есть вертикальные углы и по прямому углу) с коэффициентом подобия  $1/3$ . Поэтому  $AE=13$ . Из треугольника  $ACE$ , по теореме Пифагора, находим  $CE=12$ . Отсюда,  $DE=36$ , а  $CD=48$ .

2. (17 баллов) Найдите наименьший корень уравнения

$$|\sin(\pi x) + \operatorname{tg} x| = x + x^3.$$

**Ответ: 0**

**Решение.** Очевидно, что 0 – корень уравнения (при  $x=0$  обе части уравнения равны нулю). Если же  $x < 0$ , правая часть уравнения отрицательна, в то время как левая часть уравнения всегда неотрицательна.

3. (17 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, которое одновременно является удвоенным точным кубом и утроенным точным квадратом.

**Ответ: 432**

**Решение.** Имеем  $k = 2n^3 = 3m^2$ . Отсюда числа  $m$  и  $n$  можно представить в виде  $n = 3a$ ,  $m = 2b$ . После подстановки получим  $9a^3 = 2b^2$ . Далее имеем  $a = 2c$ ,  $b = 3d$ ,  $4c^3 = d^2$ . Здесь наименьшее решение  $c=1$ ,  $d=2$ . Тогда  $a=2$ ,  $b=6$ ,  $n=6$ ,  $m=12$ ,  $k=432$ .

4. (15 баллов) КПД идеальной тепловой машины равен 50%. Каким он станет, если температуру нагревателя увеличить на 50%, а температуру холодильника уменьшить на 50%?

**Ответ:  $\approx 83\%$**

**Решение.** КПД идеальной тепловой машины:  $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H}$ . То есть в начале отношение температур холодильника и нагревателя:  $\frac{T_X}{T_H} = 1 - 0,5 = 0,5$ . После изменений:

$$\eta_2 = 1 - \frac{0,5T_X}{1,5T_H} = 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{1,5} \approx 0,83 = 83\%.$$

**5. (20 баллов)** Точечный источник света располагается на одинаковом расстоянии  $x = 10 \text{ см}$  от линзы и её главной оптической оси. Его прямое изображение расположено на расстоянии  $y = 20 \text{ см}$  от главной оптической оси. Определите оптическую силу линзы и расстояние между источником света и его изображением.

**Ответ:** 5 Дптр и  $\approx 14,1 \text{ см}$

**Решение.** Изображение прямое, следовательно, оно мнимое. Увеличение:

$\Gamma = \frac{y}{x} = \frac{f}{d}$ . Получаем, что расстояние от линзы до изображения:

$f = d \cdot \frac{y}{x} = 10 \cdot \frac{20}{10} = 20 \text{ см}$ . Оптическая сила линзы:

$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Дптр}$ . Расстояние между источником и его

изображением:  $s = \sqrt{(x-y)^2 + (d-f)^2} = \sqrt{200} \approx 14,1 \text{ см}$ .

**6. (15 баллов)** Бак массой  $m_1 = 3 \text{ кг}$  покоится на тележке массой  $m_2 = 15 \text{ кг}$ , которую разгоняют с ускорением  $a = 4 \text{ м/с}^2$ . Коэффициент трения между баком и тележкой  $\mu = 0,6$ . Определите силу трения, действующую на бак со стороны тележки.

**Ответ:** 12 Н

**Решение.** При данных условиях речь идет о силе трения покоя. По второму закону Ньютона:  $F_{тр} = m_1 a = 12 \text{ Н}$ .