Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

10 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Колонна пехоты растянулась на 1 км. Старшина Ким, выехав на гироскутере из конца колонны, достиг её начала и вернулся к концу. Пехотинцы прошли за это время 4/3 км. А какое расстояние за это время проехал старшина?

Ответ: 8/3 км

Решение. Пусть скорость колонны x км/ч, а старшина ехал в k раз быстрее, т. е. со скоростью kx км/ч. До конца колонны Ким ехал $t_1 = \frac{1}{kx-x}$ ч (движение вдогонку), а в обратном направлении $t_2 = \frac{1}{kx+x}$ ч (движение навстречу). За это время колонна преодолела 4/3 км, т. е. $x(t_1+t_2) = 4/3$. Подставив выражения для t_1 и t_2, получим

$$\frac{x}{kx-x} + \frac{x}{kx+x} = 4/3; \quad \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} = 4/3; \quad 2k = \frac{4}{3}(k^2-1).$$

У полученного квадратного уравнения единственный положительный корень $k = 2$. Старшина едет в 2 раза быстрее, чем колонна. Поэтому и расстояние, которое он преодолеет, будет в 2 раза больше.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. Последовательность (a_n) задана такими соотношениями: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$ (при $n \geqslant 3$). Найдите a_{2019}.

Ответ: 2020.

Решение. Выпишем первые члены последовательности:

$$1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, 18, 19, 19, 19, 20, 21, 23, \ldots$$

Можно увидеть закономерность: $a_{n+6} = a_n + 6$. Докажем её. Имеем

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + n + 1 = (a_{n-1} - a_{n-2} + n) - a_{n-1} + n + 1 = -a_{n-2} + 2n + 1.$$

Заменив в полученном равенстве n на $n+2$, получим

$$a_{n+3} = -a_n + 2(n+2) + 1 = -a_n + 2n + 5.$$

Теперь заменим n на $n+3$:

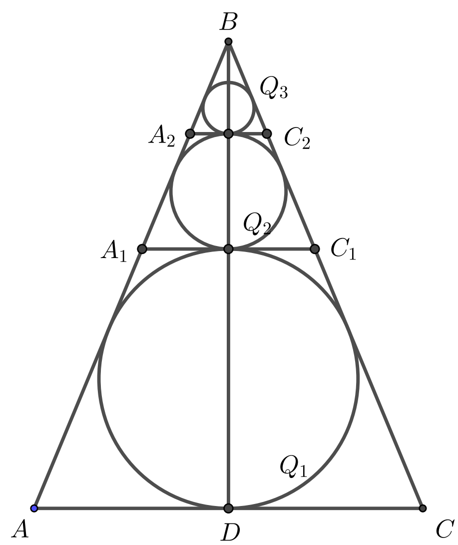
$$a_{n+6} = -a_{n+3} + 2(n+3) + 5 = a_n - 2n - 5 + 2(n+3) + 5 = a_n + 6.$$

Теперь легко найти ответ:

$$a_{2019} = a_{3+6\cdot 336} = a_3 + 6 \cdot 636 = 4 + 6 \cdot 636 = 2020.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если закономерность подмечена, но не доказана, то (при верном ответе) 6 баллов.

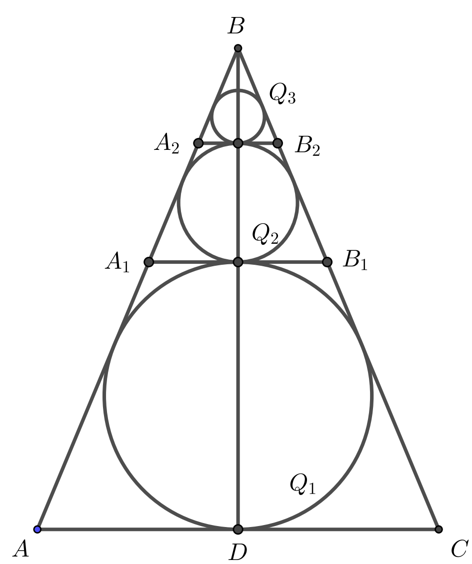
3. Дан треугольник ABC. Известны длины его сторон: $AB = BC = 80$, $AC = 96$.



Окружность Q_1 вписана в треугольник ABC. Окружность Q_2 касается Q_1 и сторон AB и BC. Окружность Q_3 касается Q_2 и также сторон AB и BC. Найдите радиус окружности Q_3.

Ответ: 1,5.

Решение. Пусть r_i — радиус окружности Q_i $(i = 1, 2, 3)$. Легко найти r_1.



Пусть BD — высота. Из треугольника ABD найдём её длину:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{80^2 - 48^2} = 64.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{AB + AD} = 24.$$

Высота треугольника A_1BC_1, проведённая из вершины B, равна

$$BD - 2r_1 = 64 - 48 = 16.$$

Проведём общие внутренние касательные к окружностям (см. рис.). Треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC. Коэффициент подобия равен отношению высот: $k = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Отсюда $r_2 = kr_1 = 6$. Треугольник A_2BC_2 подобен треугольнику A_1BC_1 с тем же коэффициентом подобия k. Поэтому $r_3 = kr_2 = 1{,}5$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если найден только радиус 1-й окружности, 4 балла.

4. Две вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2$, а одна из сторон на прямой $y = 2x - 17$. Какова площадь квадрата?

Ответ: 80 или 1280.

Решение. Легко проверить, что парабола и прямая из условия задачи не пересекаются.

Прямая l, параллельная прямой $2x - y - 17 = 0$, задаётся уравнением вида $2x - y + b = 0$, где b — некоторая константа. Расстояние между этими прямыми $d = \dfrac{|b + 17|}{\sqrt{5}}$ (данное выражение можно получить разными способами). Найдём расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_1, y_2)$, в которых прямая l пересекает параболу $y = x^2$:

$$y = 2x + b = x^2; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + b}; \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b + 1};$$

$$y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) = 4\sqrt{b + 1}; \quad M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 20(b + 1).$$

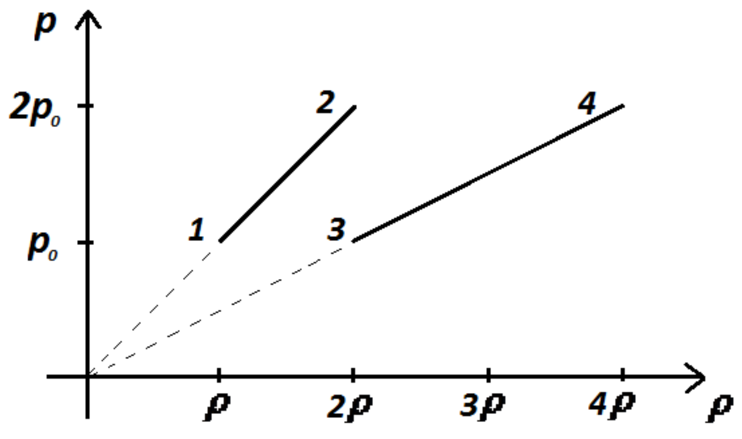
Приравняв квадраты расстояний между соседними вершинами квадрата и между его противоположными сторонами, получим уравнение относительно параметра b

$$20(b + 1) = \frac{(b + 17)^2}{5}.$$

Отсюда $b = 3$ или $b = 63$. При этом площадь квадрата $d^2 = 80$ или $d^2 = 1280$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

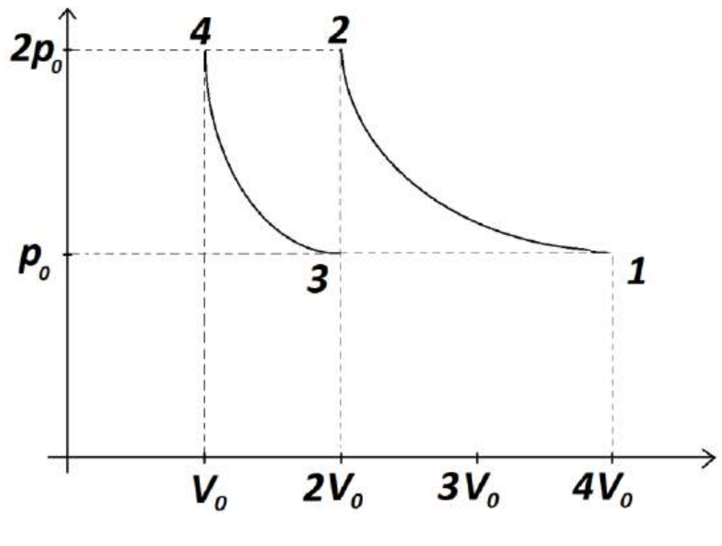
5. (*15 баллов*) На рисунке приведены зависимости давления газа от его плотности в двух проведённых процессах. Известно, что в процессе $1-2$ над газом была совершена работа A_{1-2}. Определите работу, совершаемую над газом в процессе $3-4$.



Ответ: $A_{3-4} = \frac{1}{2} A_{1-2}$

Решение. $1-2$ и $3-4$ это изотермические процессы. **(3 балла)**

Работу в изотермическом процессе можно найти как площадь под графиком, построенном в координатах $p-V$. **(2 балла)**



(2 балла)

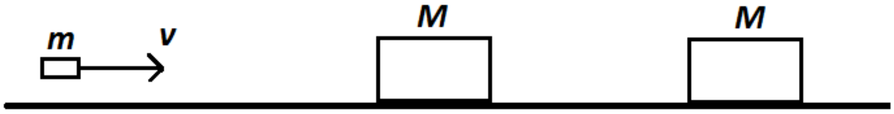
Обращает на себя внимание, что для любого значения давления объём в процессе $1-2$ ровно в два раза больше объема в процессе $3-4$. **(3 балла)**

То есть если рассматривать малое изменение объёма в процессе $1-2$, то оно оказывается ровно в два раза больше малого изменения объёма в процессе $3-4$, взятого при том же давлении: $\Delta V_{3-4} = \frac{1}{2} \Delta V_{1-2}$. **(3 балла)**

Получаем, что площадь под графиком $3-4$ ровно в два раза меньше площади под графиком $1-2$. То есть $A_{3-4}=\frac{1}{2}A_{1-2}$. **(2 балла)**

Примечание. Решение задачи, в которой ученик получает ***правильный ответ***, записав уравнение $A=p\Delta V$ без анализа площадей под графиками в координатах $p-V$, оценивается как ***неправильное*!**

6.(*10 баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой m. Какой должна быть скорость пули, чтобы конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Масса пули намного меньше массы бруска $m \ll M$. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $v=\dfrac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv=(M+m)u=Mu$. **(2 балла)**

В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$\dfrac{Mu^2}{2}=A_{тр}=2\mu MgS$. **(3 балла)**

В результате, скорость пули: $v=\dfrac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Камень массой $m=600\,г$ бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0=20\,м/с$. При наличии силы сопротивления воздуха пропорциональной скорости камня (коэффициент пропорциональности $k=0{,}1\,(Н\cdot с)/м$), максимальная высота на которой оказался камень равна $h=10\,м$. Работа силы сопротивления за этот промежуток времени равна

$A = 30$ *Дж*. Определите ускорение камня для самой высокой точки траектории. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Ответ: $\approx 10{,}1\ \frac{м}{с^2}$

Решение. Закон сохранения энергии в данной ситуации выглядит следующим образом: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh + A.$ **(3 балла)**

В результате, находим скорость в самой верхней точке:

$$v_к = \sqrt{v_0^2 - 2gh - \frac{2A}{m}} = \sqrt{20^2 - 2\cdot 10\cdot 10 - \frac{2\cdot 30}{0{,}6}} = 10\ \frac{м}{с}.$$ **(3 балла)**

Ускорение, связанное с силой сопротивления, направлено против скорости, то есть параллельно оси *OX*, и оно равно: $a_x = \frac{F_{сопр}}{m} = \frac{kv_к}{m} = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}6} = \frac{5}{3}\ \frac{м}{с^2}$.

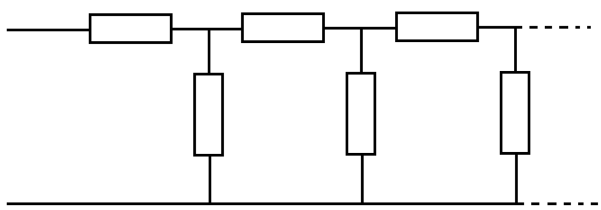
(3 балла)

Ускорение, связанное с силой тяжести, направлено вертикально вниз:

$a_y = g = 10\ м/с^2$. **(2 балла)**

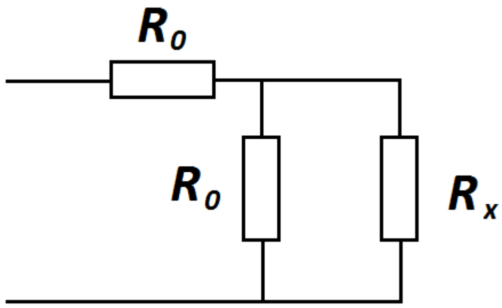
Полное ускорение: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 10^2} \approx 10{,}1\ \frac{м}{с^2}$. **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) Определите сопротивление бесконечно длинной цепи, составленной из одинаковых резисторов $R_0 = 10$ *Ом*.



Ответ: $\approx 16{,}2$ *Ом*

Решение. Пусть сопротивление всей цепи R_X. Тогда добавляя к R_X два резистора R_0, мы получаем следующую схему: **(4 балла)**



Её сопротивление также R_X. **(1 балл)**

В результате получаем: $R_X = R_0 + \dfrac{R_0 R_X}{R_0 + R_X}$. **(2 балла)**

Решая данное уравнение, получаем окончательный ответ:

$R_X = 5 + 5\sqrt{5} \approx 16{,}2\ Ом$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

10 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Колонна пехоты растянулась на 1 км. Старшина Ким, выехав на гироскутере из конца колонны, достиг её начала и вернулся к концу. Пехотинцы прошли за это время 2 км 400 м. А какое расстояние за это время проехал старшина?

Ответ: 3 км 600 м

Решение. Пусть скорость колонны x км/ч, а старшина ехал в k раз быстрее, т. е. со скоростью kx км/ч. До конца колонны Ким ехал $t_1 = \frac{1}{kx-x}$ ч (движение вдогонку), а в обратном направлении $t_2 = \frac{1}{kx+x}$ ч (движение навстречу). За это время колонна преодолела 2,4 км, т. е. $x(t_1+t_2) = 2{,}4$. Подставив выражения для t_1 и t_2, получим

$$\frac{x}{kx-x} + \frac{x}{kx+x} = 2{,}4; \quad \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} = 2{,}4; \quad 2k = 2{,}4(k^2-1).$$

У полученного квадратного уравнения единственный положительный корень $k = \frac{3}{2}$. Старшина едет в 1,5 раза быстрее, чем колонна. Поэтому и расстояние, которое он преодолеет, будет в 1,5 раза больше.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. Последовательность (a_n) задана такими соотношениями: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$ (при $n \geqslant 3$). Найдите a_{1000}.

Ответ: 1002.

Решение. Выпишем первые члены последовательности:

$$1, 3, 5, 6, 6, 6, 7, 9, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 17, 18, 18, 18, 19, 21, \ldots$$

Можно увидеть закономерность: $a_{n+6} = a_n + 6$. Докажем её. Имеем

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + n + 1 = (a_{n-1} - a_{n-2} + n) - a_{n-1} + n + 1 = -a_{n-2} + 2n + 1.$$

Заменив в полученном равенстве n на $n+2$, получим

$$a_{n+3} = -a_n + 2(n+2) + 1 = -a_n + 2n + 5.$$

Теперь заменим n на $n+3$:

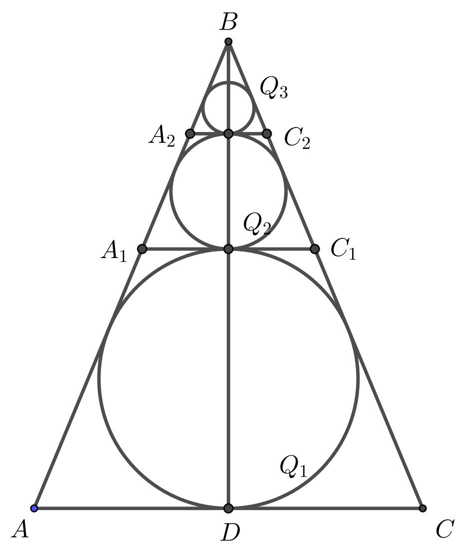
$$a_{n+6} = -a_{n+3} + 2(n+3) + 5 = a_n - 2n - 5 + 2(n+3) + 5 = a_n + 6.$$

Теперь легко найти ответ:

$$a_{1000} = a_{4+6\cdot166} = a_4 + 6\cdot166 = 6 + 6\cdot166 = 1002.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если закономерность подмечена, но не доказана, то (при верном ответе) 6 баллов.

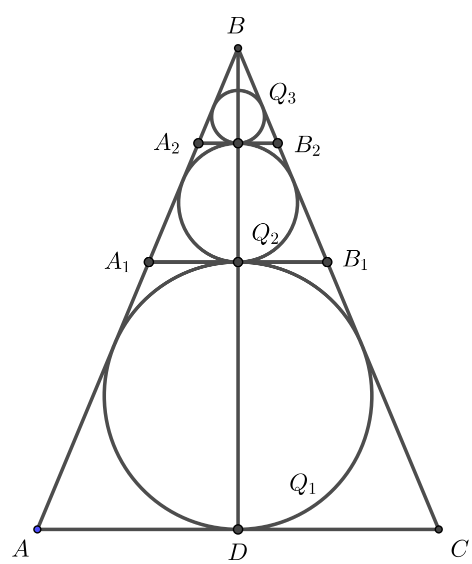
3. Дан треугольник ABC. Известны длины его сторон: $AB = BC = 78$, $AC = 60$.



Окружность Q_1 вписана в треугольник ABC. Окружность Q_2 касается Q_1 и сторон AB и BC. Окружность Q_3 касается Q_2 и также сторон AB и BC. Найдите радиус окружности Q_3.

Ответ: $\frac{320}{81}$.

Решение. Пусть r_i — радиус окружности Q_i $(i = 1, 2, 3)$. Легко найти r_1.



Высота $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{78^2 - 30^2} = 72$. Отсюда

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{AB + AD} = 20.$$

Высота треугольника A_1BC_1, проведённая из вершины B, равна

$$BD - 2r_1 = 72 - 40 = 32.$$

Проведём общие внутренние касательные к окружностям (см. рис.). Треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC. Коэффициент подобия равен отношению высот: $k = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$. Отсюда $r_2 = kr_1 = \dfrac{80}{9}$. Треугольник A_2BC_2 подобен треугольнику A_1BC_1 с тем же коэффициентом подобия k. Поэтому $r_3 = kr_2 = \dfrac{320}{81}$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если найден только радиус 1-й окружности, 4 балла.

4. Две вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2$, а одна из сторон на прямой $y = 2x - 22$. Какова площадь квадрата?

Ответ: 180 или 980.

Решение. Легко проверить, что парабола и прямая из условия задачи не пересекаются.

Прямая l, параллельная прямой $2x - y - 22 = 0$, задаётся уравнением вида $2x - y + b = 0$, где b — некоторая константа. Расстояние между этими прямыми $d = \dfrac{|b + 22|}{\sqrt{5}}$ (данное выражение можно получить разными способами). Найдём расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_1, y_2)$, в которых прямая l пересекает параболу $y = x^2$:

$$y = 2x + b = x^2; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + b}; \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b + 1};$$

$$y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) = 4\sqrt{b + 1}; \quad M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 20(b + 1).$$

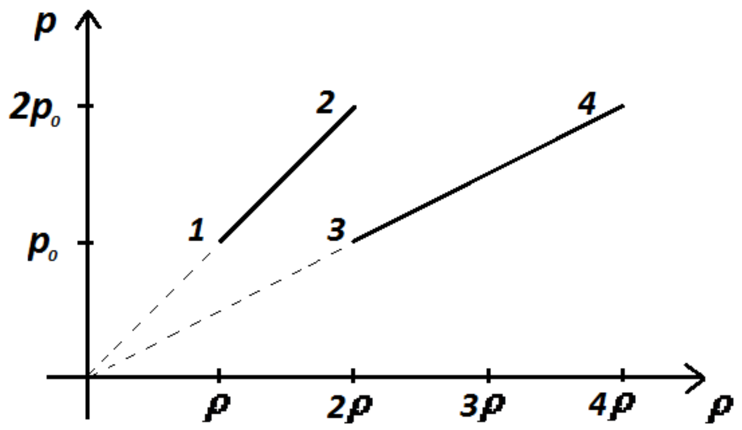
Приравняв квадраты расстояний между соседними вершинами квадрата и между его противоположными сторонами, получим уравнение относительно параметра b

$$20(b + 1) = \frac{(b + 22)^2}{5}.$$

Отсюда $b = 8$ или $b = 48$. При этом площадь квадрата $d^2 = 180$ или $d^2 = 980$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

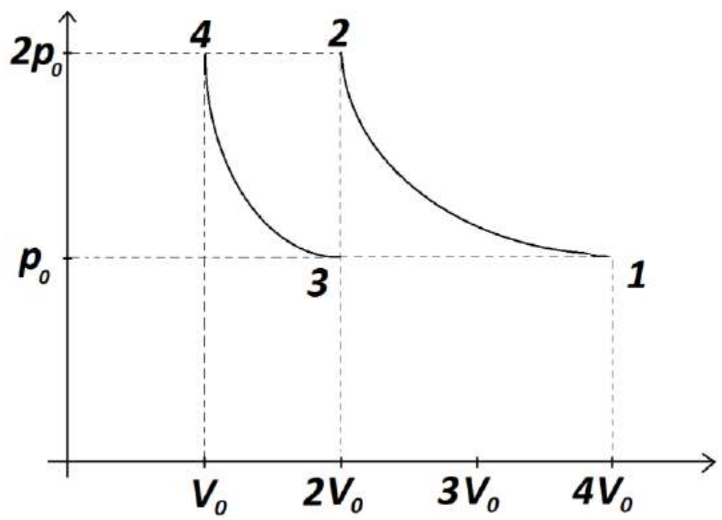
5. (*15 баллов*) На рисунке приведены зависимости давления газа от его плотности в двух проведенных процессах. Известно, что в процессе $3-4$ над газом была совершена работа A_{3-4}. Определите работу, совершаемую над газом в процессе $1-2$.



Ответ: $A_{1-2} = 2A_{3-4}$

Решение. $1-2$ и $3-4$ это изотермические процессы. **(3 балла)**

Работу в изотермическом процессе можно найти как площадь под графиком, построенном в координатах $p-V$. **(2 балла)**



(2 балла)

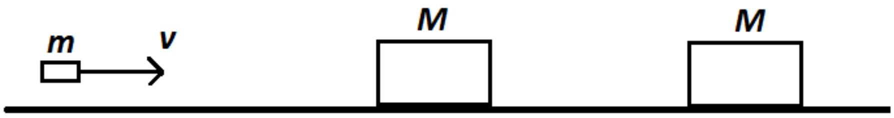
Обращает на себя внимание, что для любого значения давления объём в процессе $1-2$ ровно в два раза больше объема в процессе $3-4$. **(3 балла)**

То есть если рассматривать малое изменение объема в процессе $1-2$, то оно оказывается ровно в два раза больше малого изменения объема в процессе $3-4$, взятого при том же давлении: $\Delta V_{1-2} = 2 \cdot \Delta V_{3-4}$. **(3 балла)**

Получаем, что площадь под графиком $1-2$ ровно в два раза больше площади под графиком $3-4$. То есть $A_{1-2} = 2A_{3-4}$. **(2 балла)**

Примечание. Решение задачи, в которой ученик получает ***правильный ответ***, записав уравнение $A = p\Delta V$ без анализа площадей под графиками в координатах $p - V$, оценивается как ***неправильное*!**

6.(*10 баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля. Скорость пули перед попаданием в брусок v. Известно, что конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Определите массу пули, если известно, что она намного меньше массы бруска. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $m = \dfrac{2M}{v}\sqrt{\mu g S}$

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv = (M+m)u = Mu$. **(2 балла)**

В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$$\frac{Mu^2}{2} = A_{тр} = 2\mu MgS.$$ **(3 балла)**

В результате, масса пули: $m = \dfrac{2M}{v}\sqrt{\mu g S}$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Камень массой $m = 800\ г$ бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20\ м/с$. При наличии силы сопротивления воздуха пропорциональной скорости камня (коэффициент пропорциональности $k = 0{,}2\ (Н \cdot с)/м$), максимальная высота на которой оказался камень равна $h = 10\ м$. Работа силы сопротивления за этот промежуток времени равна

$A = 40\,Дж$. Определите ускорение камня для самой высокой точки траектории. Ускорение свободного падения $g = 10\,м/с^2$.

Ответ: $\approx 10{,}3\,\frac{м}{с^2}$

Решение. Закон сохранения энергии в данной ситуации выглядит следующим образом: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh + A.$ **(3 балла)**

В результате, находим скорость в самой верхней точке:

$$v_к = \sqrt{v_0^2 - 2gh - \frac{2A}{m}} = \sqrt{20^2 - 2\cdot 10\cdot 10 - \frac{2\cdot 40}{0{,}8}} = 10\,\frac{м}{с}.$$ **(3 балла)**

Ускорение, связанное с силой сопротивления, направлено против скорости, то есть параллельно оси *OX*, и оно равно: $a_x = \frac{F_{сопр}}{m} = \frac{kv_к}{m} = \frac{0{,}2\cdot 10}{0{,}8} = 2{,}5\,\frac{м}{с^2}$.

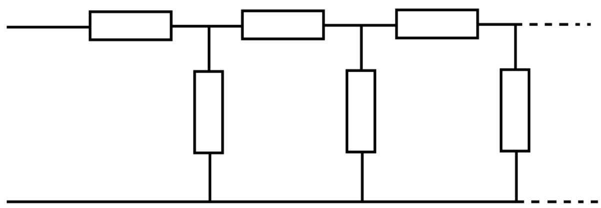
(3 балла)

Ускорение, связанное с силой тяжести, направлено вертикально вниз:

$a_y = g = 10\,м/с^2$. **(2 балла)**

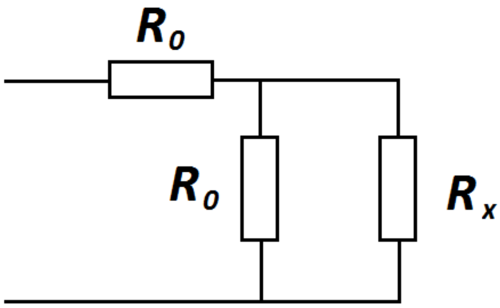
Полное ускорение: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 10^2} \approx 10{,}3\,\frac{м}{с^2}$. **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) Определите сопротивление бесконечно длинной цепи, составленной из одинаковых резисторов $R_0 = 50\,Ом$.



Ответ: $\approx 81\,Ом$

Решение. Пусть сопротивление всей цепи R_X. Тогда добавляя к R_X два резистора R_0, мы получаем следующую схему: **(4 балла)**



Её сопротивление также R_X. **(1 балл)**

В результате получаем: $R_X = R_0 + \dfrac{R_0 R_X}{R_0 + R_X}$. **(2 балла)**

Решая данное уравнение, получаем окончательный ответ: $R_X = 25 + 25\sqrt{5} \approx 81\ Ом$. **(3 балла)**