Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап
2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант I

1. Андрей, Борис и Валентин участвовали в забеге на 1 км. (Считаем, что каждый из них бежал с постоянной скоростью). Андрей на финише был впереди Бориса на 50 м. А Борис на финише был впереди Валентина на 40 м. Какое расстояние было между Андреем и Валентином в тот момент, когда финишировал Андрей?

Ответ: 88 м.

Решение. Пусть скорости Андрея, Бориса и Валентина соответственно a, b и c м/с. Из условия следует, что $b = 0{,}95a$, $c = 0{,}96b$. Отсюда $c = 0{,}96 \cdot 0{,}95a = 0{,}912a$. Значит, когда Андрей пробежит 1000 м, Валентин преодолеет 912 м. Отставание составит 88 м.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В класс пришёл новый учитель математики. Он провёл опрос среди учеников этого класса, любят ли они математику. Оказалось, что 50% любят математику, а 50% не любят. Такой же опрос учитель провёл в конце учебного года. На этот раз «да» ответили 70% учеников, «нет» — 30% учеников. Пусть x% учеников дали во втором опросе не такой ответ, как в первом. Найдите наименьшее и наибольшее значение x.

Ответ: 20; 80.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что в классе 100 учеников. Пусть из них

- a учеников оба раза ответили «да»,
- b учеников оба раза ответили «нет»,
- c учеников поменяли ответ «нет» на ответ «да»,
- d учеников поменяли ответ «да» на ответ «нет».

Нужно найти наименьшее и наибольшее значение $x = c + d$ при условии, что $c + b = a + d = 50$, $a + c = 70$, $b + d = 30$. Имеем

$$c = 50 - b; \quad d = 30 - b; \quad x = c + d = 80 - 2b.$$

Отсюда $0 \leqslant b \leqslant 30$, а $20 \leqslant x \leqslant 80$.

Если $b = 0$, то $c = 50$, $d = 30$, $a = 20$.

Если $b = 30$, то $c = 20$, $d = 0$, $a = 50$.

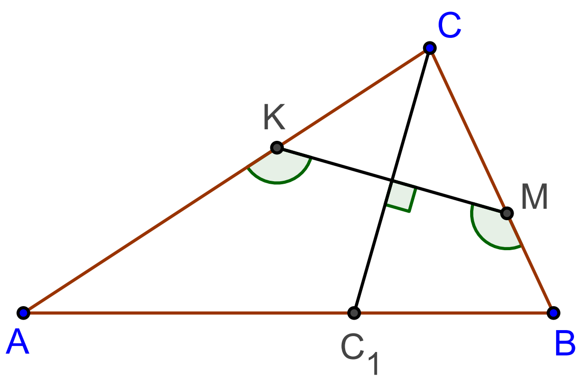
Значит, наименьшее и наибольшее значение x равны 20 и 80.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если верно найдено только одно из двух значений, 3 б.

3. Из бумаги вырезан треугольник ABC с длинами сторон $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $CA = 4$ см. Его перегнули по прямой так, что вершина C оказалась в точке C_1 на стороне AB. Кроме того, в получившемся четырёхугольнике $AKMB$ оказались равными два угла, примыкающие к линии сгиба KM. Найдите AC_1 и C_1B.

Ответ: $\frac{10}{3}$ см и $\frac{8}{3}$.

Решение. Точки C и C_1 симметричны относительно линии сгиба. Поэтому $CC_1 \perp KM$. Из равенства углов AKM и KMB вытекает равенство и смежных им углов. Поэтому треугольник CKM равнобедренный. Его высота, лежащая на CC_1, будет и биссектрисой.



Значит, CC_1 — биссектриса треугольника ACB. По теореме о биссектрисе,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому $AC_1 = \frac{5}{9}AB = \frac{10}{3}$ см, $C_1B = \frac{4}{9}AB = \frac{8}{3}$ см.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Пусть a, b, c, d, e — положительные целые числа. Их сумма равна 2018. Пусть $M = \max(a + b, b + c, c + d, d + e)$. Найдите наименьшее возможное значение M.

Ответ: 673.

Решение. *Оценка.* Имеем неравенства

$$a + b \leqslant M; \quad b + c \leqslant M; \quad c + d \leqslant M; \quad d + e \leqslant M.$$

Первое и последнее неравенства умножим на 2 и сложим с двумя другими. Получим:

$$2(a+b+c+d+e)+b+d \leqslant 6M; \quad 6M \geqslant 4036+b+d \geqslant 4038; \quad M \geqslant 673.$$

Пример. Равество $M = 673$ достигается при $a = c = e = 672$, $b = d = 1$.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только верный пример, 7 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс
Вариант 1

физика

5. Маленький шарик отпустили без начальной скорости с высоты $h = 20\ м$. Удар о горизонтальную поверхность Земли является абсолютно упругим. Определите, в какой момент времени после начала падения шарика его средняя путевая скорость будет равна его мгновенной скорости. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$. **(*15 баллов*)**

Ответ: 2,83 *с*

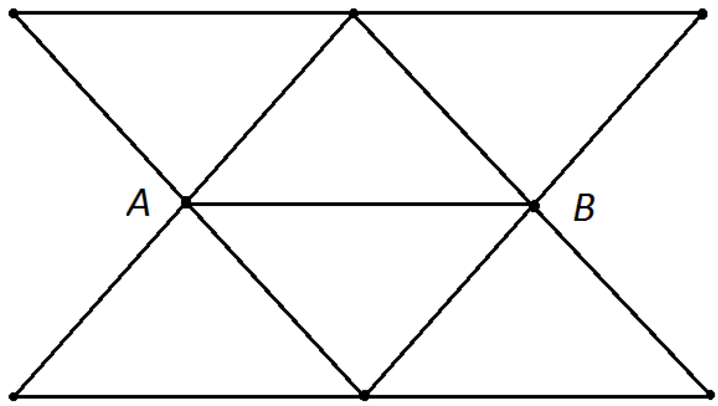
Решение. Очевидно, что пока шарик летит вниз, мгновенная скорость будет больше средней путевой. Момент времени, когда шарик ударится о Землю:

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2\ с$ (2 балла). Соответствующая скорость: $v_1 = gt_1 = 10 \cdot 2 = 20\ м/с$ (2 балла). Уравнения движения после абсолютно упругого удара:

$x = v_1(t - t_1) - \frac{g(t - t_1)^2}{2}$ (2 балла), $v = v_1 - g(t - t_1)$ (2 балла). По условию: $v_{ср} = v$, то есть

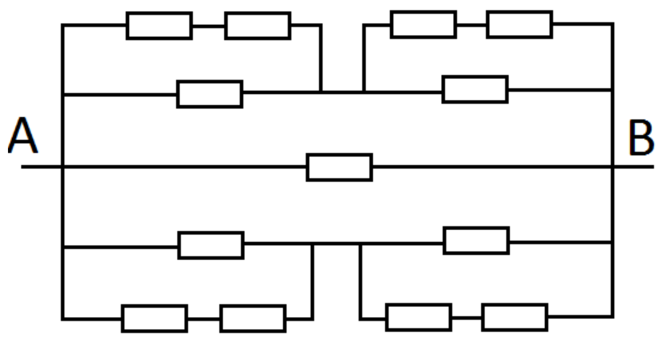
$\frac{h + x}{t} = v$ (2 балла), $\frac{h + v_1(t - t_1) - \frac{g(t - t_1)^2}{2}}{t} = v_1 - g(t - t_1)$ (2 балла). Решая данное уравнение, получаем $t = \sqrt{8} \approx 2{,}83\ с$ (3 балла).

6. Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление одного стержня $R_0 = 10\ Ом$. Определите сопротивление всей конструкции, если она подключается к источнику тока точками *A* и *B*. **(*10 баллов*)**



Ответ: 4 *Ом*

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом (5 баллов),



где каждый из резисторов имеет сопротивление $R_0 = 10\ Ом$. В результате, общее сопротивление: $R = \frac{4}{10} R_0 = 4\ Ом$ (5 баллов).

7. Удельная теплоёмкость тела массой $m = 2\ кг$ зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 150\ Дж/кг \cdot °C$ – удельная теплоёмкость при $0\ °C$, $\alpha = 0{,}05\ °C^{-1}$ – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от $20\ °C$ до $100\ °C$. (***10 баллов***)

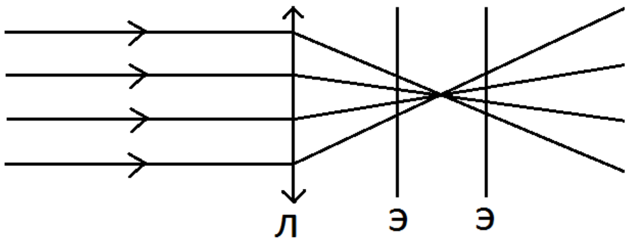
Ответ: 96 *кДж*

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение: $c_{ср} = \frac{c_0(1 + \alpha t_н) + c_0(1 + \alpha t_к)}{2} = 600\ \frac{Дж}{кг \cdot °C}$ (5 баллов). Искомое количество тепла: $Q = c_{ср} m \Delta t = 600 \cdot 2 \cdot 80 = 96000\ Дж = 96\ кДж$ (5 баллов).

8. На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии $80\,см$ от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определенного диаметра. Если экран передвинуть на $40\,см$, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы. (***15 баллов***)

Ответ: 100 *см* или 60 *см*

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии (5 баллов):



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы $F_1 = 80 + 20 = 100\,см$ (5 баллов). Или $F_2 = 80 - 20 = 60\,см$ (5 баллов).

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант II

1. Андрей, Борис и Валентин участвовали в забеге на 1 км. (Считаем, что каждый из них бежал с постоянной скоростью). Андрей на финише был впереди Бориса на 60 м. А Борис на финише был впереди Валентина на 50 м. Какое расстояние было между Андреем и Валентином в тот момент, когда финишировал Андрей?

Ответ: 107 м.

Решение. Пусть скорости Андрея, Бориса и Валентина соответственно a, b и c м/с. Из условия следует, что $b = 0{,}94a$, $c = 0{,}95b$. Отсюда $c = 0{,}94 \cdot 0{,}95a = 0{,}893a$. Значит, когда Андрей пробежит 1000 м, Валентин преодолеет 893 м. Отставание составит 107 м.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В класс пришёл новый учитель математики. Он провёл опрос среди учеников этого класса, любят ли они математику. Оказалось, что 50% любят математику, а 50% не любят. Такой же опрос учитель провёл в конце учебного года. На этот раз «да» ответили 60% учеников, «нет» — 40% учеников. Пусть $x\%$ учеников дали во втором опросе не такой ответ, как в первом. Найдите наименьшее и наибольшее значение x.

Ответ: 10; 90.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что в классе 100 учеников. Пусть из них

- a учеников оба раза ответили «да»,
- b учеников оба раза ответили «нет»,
- c учеников поменяли ответ «нет» на ответ «да»,
- d учеников поменяли ответ «да» на ответ «нет».

Нужно найти наименьшее и наибольшее значение $x = c + d$ при условии, что $c + b = a + d = 50$, $a + c = 60$, $b + d = 40$. Имеем

$$c = 50 - b; \quad d = 40 - b; \quad x = c + d = 90 - 2b.$$

Отсюда $0 \leqslant b \leqslant 40$, а $10 \leqslant x \leqslant 90$.

Если $b = 0$, то $c = 50$, $d = 40$, $a = 10$.

Если $b = 40$, то $c = 10$, $d = 0$, $a = 50$.

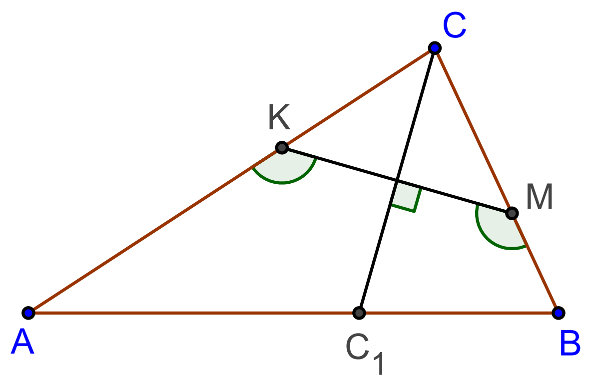
Значит, наименьшее и наибольшее значение x равны 10 и 90.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если верно найдено только одно из двух значений, 3 б.

3. Из бумаги вырезан треугольник ABC с длинами сторон $AB = 7$ см, $BC = 6$ см, $CA = 5$ см. Его перегнули по прямой так, что вершина C оказалась в точке C_1 на стороне AB. Кроме того, в получившемся четырёхугольнике $AKMB$ оказались равными два угла, примыкающие к линии сгиба KM. Найдите AC_1 и C_1B.

Ответ: $\frac{42}{11}$ см и $\frac{35}{11}$.

Решение. Точки C и C_1 симметричны относительно линии сгиба. Поэтому $CC_1 \perp KM$. Из равенства углов AKM и KMB вытекает равенство и смежных им углов. Поэтому треугольник CKM равнобедренный. Его высота, лежащая на CC_1, будет и биссектрисой.



Значит, CC_1 — биссектриса треугольника ACB. По теореме о биссектрисе,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB} = \frac{6}{5}.$$

Поэтому $AC_1 = \frac{6}{11}AB = \frac{42}{11}$ см, $C_1B = \frac{5}{11}AB = \frac{35}{11}$ см.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Пусть a, b, c, d, e — положительные целые числа. Их сумма равна 2345. Пусть $M = \max(a+b, b+c, c+d, d+e)$. Найдите наименьшее возможное значение M.

Ответ: 782.

Решение. *Оценка.* Имеем неравенства

$$a + b \leqslant M; \quad b + c \leqslant M; \quad c + d \leqslant M; \quad d + e \leqslant M.$$

Первое и последнее неравенства умножим на 2 и сложим с двумя другими. Получим:

$$2(a+b+c+d+e)+b+d \leqslant 6M; \quad 6M \geqslant 4690+b+d \geqslant 4692; \quad M \geqslant 782.$$

Пример. Равество $M = 782$ достигается при $a = c = e = 781$, $b = d = 1$.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только верный пример, 7 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс
Вариант 2

физика

5. Маленький шарик отпустили без начальной скорости с высоты $h=45\,м$. Удар о горизонтальную поверхность Земли является абсолютно упругим. Определите, в какой момент времени после начала падения шарика его средняя путевая скорость будет равна его мгновенной скорости. Ускорение свободного падения $g=10\,м/с^2$.

(*15 баллов*)

Ответ: 4,24 $с$

Решение. Очевидно, что пока шарик летит вниз, мгновенная скорость будет больше средней путевой. Момент времени, когда шарик ударится о Землю:

$t_1=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 45}{10}}=3\,с$ (2 балла). Соответствующая скорость: $v_1=gt_1=10\cdot 3=30\,м/с$

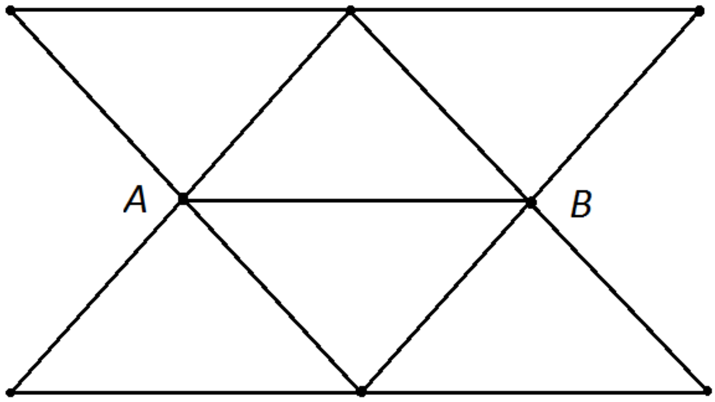
(2 балла). Уравнения движения после абсолютно упругого удара

$x=v_1(t-t_1)-\dfrac{g(t-t_1)^2}{2}$ (2 балла), $v=v_1-g(t-t_1)$ (2 балла). По условию: $v_{ср}=v$, то есть

$\dfrac{h+x}{t}=v$ (2 балла), $\dfrac{h+v_1(t-t_1)-\dfrac{g(t-t_1)^2}{2}}{t}=v_1-g(t-t_1)$ (2 балла). Решая данное уравнение, получаем: $t=\sqrt{18}\approx 4{,}24\,с$ (3 балла).

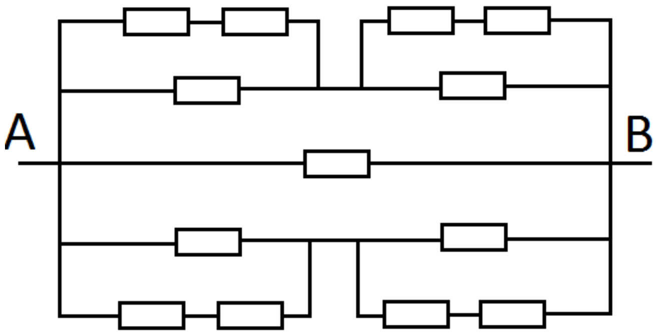
6. Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление всей конструкции $R=8\,Ом$. Определите сопротивление одного стержня R_0, если данная конструкция подключается к источнику тока точками A и B.

(*10 баллов*)



Ответ: 20 *Ом*

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом (5 баллов),



где каждый из резисторов имеет сопротивление R_0. В результате,

общее сопротивление: $R=\frac{4}{10}R_0$, то есть сопротивление одного стержня $R_0=20\,Ом$ (5 баллов).

7. Удельная теплоёмкость тела массой $m=3\,кг$ зависит от температуры следующим образом: $c=c_0(1+\alpha t)$, где $c_0=200\,Дж/кг\cdot{}^\circ C$ – удельная теплоёмкость при $0\,{}^\circ C$, $\alpha=0{,}05\,{}^\circ C^{-1}$ – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от $30\,{}^\circ C$ до $80\,{}^\circ C$. **(*10 баллов*)**

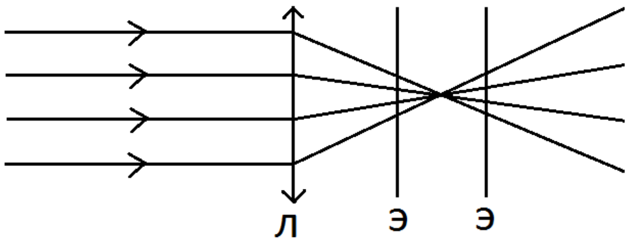
Ответ: 112,5 *кДж*

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение: $c_{ср}=\frac{c_0(1+\alpha t_н)+c_0(1+\alpha t_к)}{2}=750\,\frac{Дж}{кг\cdot{}^\circ C}$ (5 баллов). Искомое количество тепла: $Q=c_{ср}m\Delta t=750\cdot3\cdot50=112500\,Дж=112{,}5\,кДж$ (5 баллов).

8. На тонкую линзу с фокусным расстоянием $F = 150\,см$ падает нормально параллельный пучок света. За линзой располагается экран, на котором видно круглое пятно определенного диаметра. Если экран передвинуть на $40\,см$, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите начальное расстояние от линзы до экрана. (***15 баллов***)

Ответ: 170 *см* или 130 *см*

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии (5 баллов):



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате начальное расстояние от линзы до экрана:

$S_1 = 150 + 20 = 170\,см$ (5 баллов) или $S_2 = 150 - 20 = 130\,см$ (5 баллов).