Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант I

1. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет ровно $17°$?

Ответ: 44.

Решение. За промежуток времени от 0:00 до 12:00 часовая стрелка сделает один полный оборот, а минутная — 12 таких оборотов. Значит, за указанное время минутная стрелка 11 раз догоняет часовую. Между двумя последовательными встречами стрелок ровно два раза угол между ними составит $17°$. Стало быть, между полуночью и полднем $11 \cdot 2 = 22$ раза между стрелками будет нужный угол, а за сутки таких моментов буде вдвое больше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-2}{11}}+\sqrt{\frac{x-3}{10}}=\sqrt{\frac{x-11}{2}}+\sqrt{\frac{x-10}{3}}.$$

Ответ: 13.

Решение. Если выполнить замену переменной $x = t + 13$, то во всех подкоренных выражениях выделится 1:

$$\sqrt{\frac{t}{11}+1}+\sqrt{\frac{t}{10}+1}=\sqrt{\frac{t}{2}+1}+\sqrt{\frac{t}{3}+1}. \qquad (*)$$

Теперь видно, что при $t > 0$ больше правая часть уравнения, при $-2 \leqslant t < 0$ больше левая часть, а при $t = 0$ выполняется равенство. Значит, $t = 0$ — единственный корень уравнения $(*)$, а исходное уравнение имеет единственный корень $x = 13$.

Замечание. Другое решение может быть основано на таком наблюдении:

$$(k > m > 0) \Rightarrow \left(\frac{x-k}{m} > \frac{x-m}{k} \iff x > k+m\right).$$

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказана его единственность, 3 б.

3. Пусть в треугольнике ABC

$$\cos(2\angle A - \angle B) + \sin(\angle A + \angle B) = 2.$$

Найдите сторону BC, если $AB = 4$.

Ответ: 2.

Решение. В левой части уравнения каждое слагаемое не больше 1. Поэтому равенство будет иметь место только, если каждое из них равно 1. Решим соответствующие уравнения, обозначив $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$:

$$2\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

С учётом того, что $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, получаем

$$2\alpha - \beta = 0; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\beta = 2\alpha, \quad 3\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Значит, ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB и углом в 30° против стороны BC. Поэтому $BC = AB/2 = 2$.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Найдите уравнение такой прямой L, что график функции

$$y = x^4 + 4x^3 - 26x^2$$

лежит по одну сторону от этой прямой, имея с ней две общие точки.

Ответ: $y = 60x - 225$.

Решение. Пусть $y = ax + b$ — уравнение прямой L. Нужно подобрать такие a и b, чтобы уравнение

$$x^4 + 4x^3 - 26x^2 - (ax + b) = 0$$

имело два корня x_1 и x_2 чётной кратности. Для этого многочлен четвёртой степени должен иметь такое разложение на множители:

$$x^4 + 4x^3 - 26x^2 - ax - b = (x - x_1)^2(x - x_2)^2.$$

Раскроем скобки в правой части и приравняем коэффициенты при x^3 и x^2 в правой и левой частях тождества:

$$-2(x_1 + x_2) = 4; \quad x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^2 = -26.$$

Отсюда

$$x_1 + x_2 = -2; \quad (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = -26; \quad x_1x_2 = -15.$$

Если $x_1 < x_2$, то $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

Теперь приравняем коэффициенты при x и свободные члены:

$$-2x_1x_2^2 - 2x_2x_1^2 = -2x_1x_2(x_1 + x_2) = -a; \quad x_1^2x_2^2 = -b$$

и найдём, что $a = 60$, $b = -225$.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс
Вариант 1

физика

5. Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ *м/с*. Нормальное ускорение свободного падения $g = 10$ *м/с*^{2}. В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии $S = 3\sqrt{3}$ *м* от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии. **(*15 баллов*)**

Ответ: 250 *м/с*^{2}

Решение. Уравнения движения до аномалии: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 5\sqrt{3} \cdot t$ (2 балла), $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 5 \cdot t - 5 \cdot t^2$ (2 балла), $v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{3}$ (2 балла), $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 5 - 10t$ (2 балла). Отсюда получаем, что для верхней точки полета: $t_в = 0{,}5$ *с*, $x_в = 2{,}5\sqrt{3}$ *м*, $y_в = 1{,}25$ *м* (1 балл). Уравнения движения внутри аномалии: $S = x_в + v_x t = 2{,}5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}t$ (2 балла), $y = 0 = y_в - \frac{g_a t^2}{2} = 1{,}25 - \frac{g_a t^2}{2}$ (2 балла).

Решая данную систему, получаем: $g_a = 250$ *м/с*^{2} (2 балла).

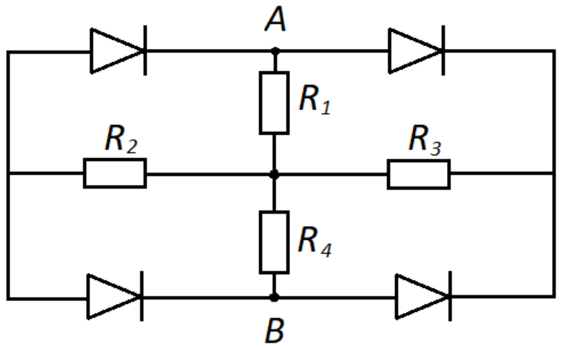
6. Тормоза автомобиля позволяют ему стоять на наклонной асфальтовой поверхности с углом при основании не более $15°$. Определите минимальный тормозной путь у данного автомобиля при движении со скоростью 20 *м/с* по ровной горизонтальной дороге с таким же покрытием. Ускорение свободного падения $g = 10$ *м/с*^{2}, $\cos 15° \approx 0{,}966$, $\sin 15° \approx 0{,}259$. **(*15 баллов*)**

Ответ: 74,6 *м*

Решение. Для ситуации, когда автомобиль стоит на наклонной плоскости:

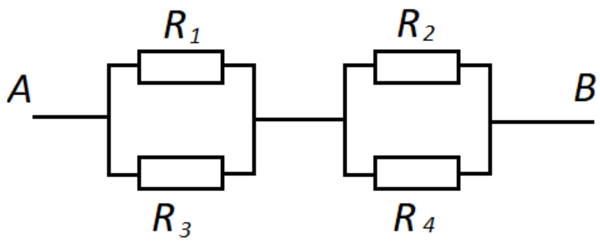
$F_{тр} = mg\sin\alpha$ (2 балла), $\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$ (2 балла). То есть коэффициент трения: $\mu = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = 0{,}268$ (3 балла). Для ситуации, когда автомобиль едет по горизонтальной поверхности: $F_{тр} = ma$, $\mu mg = ma$ (2 балла), $\mu g = a = 2{,}68$ (3 балла). Тогда тормозной путь автомобиля: $S = \frac{v^2}{2a} = \frac{20^2}{2 \cdot 2{,}68} \approx 74{,}6\ м$ (3 балла).

7. В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов $R_1 = 1\ Ом$, $R_2 = 2\ Ом$, $R_3 = 3\ Ом$ и $R_4 = 4\ Ом$. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают положительный полюс источника тока, а к точке B – отрицательный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало. (***10 баллов***)



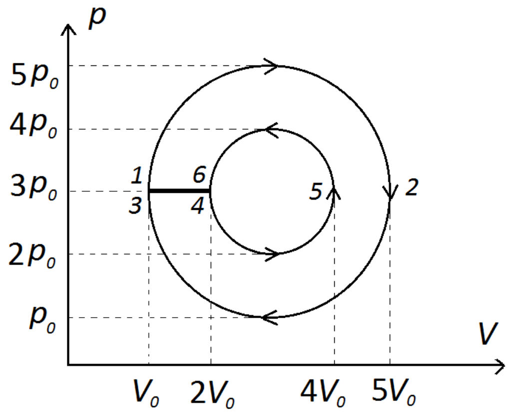
Ответ: 2,08 *Ом*

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема (5 баллов):



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} = \frac{1 \cdot 3}{1+3} + \frac{2 \cdot 4}{2+4} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08\ Ом$ (5 баллов).

8. Определите работу газа, совершаемую за цикл 1–2–3–4–5–6–1, если известно, что $p_0 = 10^5$ *Па*, $V_0 = 1$ *л*. Состояния газа 1 и 3 совпадают, аналогично для состояний 4 и 6. (***10 баллов***)



Ответ: 942 *Дж*

Решение. Работа газа в замкнутом процессе равна площади фигуры внутри процесса (2 балла). То есть в данном случае, с учетом того, что $A_{34} = -A_{61}$, получаем:

$$A = A_{123} + A_{34} + A_{456} + A_{61} = A_{123} + A_{456} = S_{окр\,123} - S_{окр\,456} = \pi \cdot \frac{(5p_0 - p_0)}{2} \cdot \frac{(5V_0 - V_0)}{2} - \pi \cdot \frac{(4p_0 - 2p_0)}{2} \cdot \frac{(4V_0 - 2V_0)}{2} = 3\pi p_0 V_0$$

(5 баллов).

Окончательный результат: $A \approx 942$ *Дж* (3 балла).

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант II

1. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет ровно 19°?

Ответ: 44.

Решение. За промежуток времени от 0:00 до 12:00 часовая стрелка сделает один полный оборот, а минутная — 12 таких оборотов. Значит, за указанное время минутная стрелка 11 раз догоняет часовую. Между двумя последовательными встречами стрелок ровно два раза угол между ними составит 17°. Стало быть, между полуночью и полднем $11 \cdot 2 = 22$ раза между стрелками будет нужный угол, а за сутки таких моментов буде вдвое больше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-3}{11}} + \sqrt{\frac{x-4}{10}} = \sqrt{\frac{x-11}{3}} + \sqrt{\frac{x-10}{4}}.$$

Ответ: 14.

Решение. Если выполнить замену переменной $x = t + 14$, то во всех подкоренных выражениях выделится 1:

$$\sqrt{\frac{t}{11}+1} + \sqrt{\frac{t}{10}+1} = \sqrt{\frac{t}{2}+1} + \sqrt{\frac{t}{3}+1}. \qquad (*)$$

Теперь видно, что при $t > 0$ больше правая часть уравнения, при $-2 \leqslant t < 0$ больше левая часть, а при $t = 0$ выполняется равенство. Значит, $t = 0$ — единственный корень уравнения $(*)$, а исходное уравнение имеет единственный корень $x = 14$.

Замечание. Другое решение может быть основано на таком наблюдении:

$$(k > m > 0) \Rightarrow \left(\frac{x-k}{m} > \frac{x-m}{k} \iff x > k+m \right).$$

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказана его единственность, 3 б.

3. Пусть в треугольнике ABC

$$\cos(\angle A - \angle B) + \sin(\angle A + \angle B) = 2.$$

Найдите сторону BC, если $AB = 4$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Решение. В левой части уравнения каждое слагаемое не больше 1. Поэтому равенство будет иметь место только, если каждое из них равно 1. Решим соответствующие уравнения, обозначив $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$:

$$\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

С учётом того, что $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, получаем

$$\alpha - \beta = 0; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\beta = \alpha, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Поэтому $BC = AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Найдите уравнение такой прямой L, что график функции

$$y = x^4 - 4x^3 - 26x^2$$

лежит по одну сторону от этой прямой, имея с ней две общие точки.

Ответ: $y = -60x - 225$.

Решение. Пусть $y = ax + b$ — уравнение прямой L. Нужно подобрать такие a и b, чтобы уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 26x^2 - (ax + b) = 0$$

имело два корня x_1 и x_2 чётной кратности. Для этого многочлен четвёртой степени должен иметь такое разложение на множители:

$$x^4 - 4x^3 - 26x^2 - ax - b = (x - x_1)^2(x - x_2)^2.$$

Раскроем скобки в правой части и приравняем коэффициенты при x^3 и x^2 в правой и левой частях тождества:

$$-2(x_1 + x_2) = -4; \quad x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^2 = -26.$$

Отсюда

$$x_1 + x_2 = 2; \quad (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = -26; \quad x_1x_2 = -15.$$

Если $x_1 < x_2$, то $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

Теперь приравняем коэффициенты при x и свободные члены:

$$-2x_1x_2^2 - 2x_2x_1^2 = -2x_1x_2(x_1 + x_2) = -a; \quad x_1^2x_2^2 = -b$$

и найдём, что $a = -60$, $b = -225$.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс
Вариант 2

физика

5. Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 20\ м/с$. Нормальное ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$. В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии $S = 15\sqrt{3}\ м$ от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии. **(*15 баллов*)**

Ответ: 40 $м/с^2$

Решение. Уравнения движения до аномалии: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 10\sqrt{3}\cdot t$ (2 балла), $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 10\cdot t - 5\cdot t^2$ (2 балла), $v_x = v_0\cos\alpha = 10\sqrt{3}$ (2 балла), $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 10 - 10t$ (2 балла). Отсюда получаем, что для верхней точки полета: $t_в = 1\ с$, $x_в = 10\sqrt{3}\ м$, $y_в = 5\ м$ (1 балла). Уравнения движения внутри аномалии: $S = x_в + v_x t = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3}t$ (2 балла), $y = 0 = y_в - \frac{g_a t^2}{2} = 5 - \frac{g_a t^2}{2}$ (2 балла). Решая данную систему, получаем: $g_a = 40\ м/с^2$ (2 балла).

6. Тормоза автомобиля позволяют ему стоять на наклонной асфальтовой поверхности с углом при основании не более $30°$. Определите минимальный тормозной путь у данного автомобиля при движении со скоростью $30\ м/с$ по ровной горизонтальной дороге с таким же покрытием. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$, $\cos 30° \approx 0{,}866$, $\sin 30° = 0{,}5$.**(*15 баллов*)**

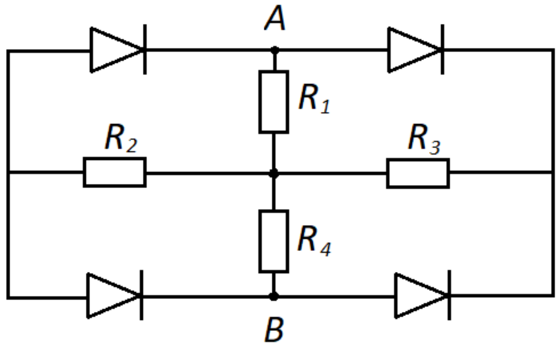
Ответ: 78 $м$

Решение. Для ситуации, когда автомобиль стоит на наклонной плоскости:

$F_{тр} = mg\sin\alpha$ (2 балла), $\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$ (2 балла). То есть коэффициент трения: $\mu = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} \approx 0{,}577$ (3 балла). Для ситуации, когда автомобиль едет по горизонтальной поверхности: $F_{тр} = ma$, $\mu mg = ma$ (2 балла), $\mu g = a = 5{,}77$ (3 балла).

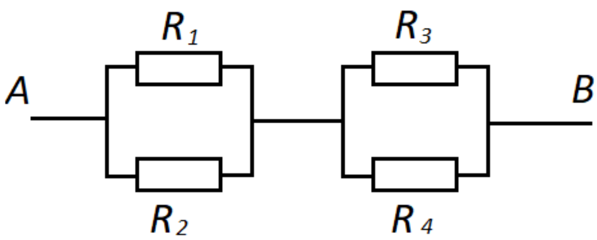
Тормозной путь автомобиля: $S = \frac{v^2}{2a} = \frac{30^2}{2 \cdot 5{,}77} \approx 78\ м$ (3 балла).

7. В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов $R_1 = 1\ Ом$, $R_2 = 2\ Ом$, $R_3 = 3\ Ом$ и $R_4 = 4\ Ом$. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают отрицательный полюс источника тока, а к точке B – положительный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало. (***10 баллов***)



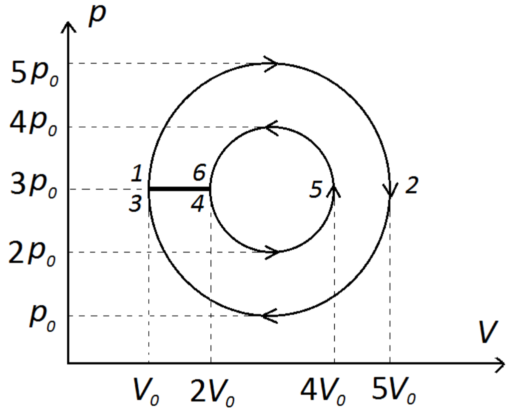
Ответ: 2,38 *Ом*

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема (5 баллов):



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{3 \cdot 4}{3+4} = \frac{50}{21} \approx 2{,}38\ Ом$ (5 баллов).

8. Определите работу газа, совершаемую за цикл 1–2–3–4–5–6–1, если известно, что $p_0 = 10^5\ Па$, $V_0 = 3л$. Состояния газа 1 и 3 совпадают, аналогично для состояний 4 и 6. **(*10 баллов*)**



Ответ: 2827 *Дж*

Решение. Работа газа в замкнутом процессе равна площади фигуры внутри процесса (2 балла). То есть в данном случае, с учетом того, что $A_{34} = -A_{61}$, получаем:

$$A = A_{123} + A_{34} + A_{456} + A_{61} = A_{123} + A_{456} = S_{окр\,123} - S_{окр\,456} = \pi \cdot \frac{(5p_0 - p_0)}{2} \cdot \frac{(5V_0 - V_0)}{2} - \pi \cdot \frac{(4p_0 - 2p_0)}{2} \cdot \frac{(4V_0 - 2V_0)}{2} = 3\pi p_0 V_0$$

(5 баллов). Окончательный результат:

$A \approx 2827\ Дж$ (3 балла).