



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант I

1. Имеются 3 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 7 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p , при которых задача имеет решение.

Ответ: $0,8p - 24$ кг; $32 - 0,8p$ кг; $31,25 \leq p \leq 33,75$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8 - x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3; \\ 0 \leq 8 - x \leq 7 \end{cases} \iff 1 \leq x \leq 3.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0,4x + 0,3(8 - x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

Отсюда $x = 0,8p - 24$. Решив двойное неравенство $1 \leq 0,8p - 24 \leq 3$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. В треугольнике ABC медиана BK в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 32° . Найдите угол ABC .

Ответ: 106° .

Решение. Пусть K — середина отрезка BD . Тогда $ABCD$ — параллелограмм. В треугольнике ABD имеем равенство сторон AB и BD . Поэтому

$$\angle BDA = \frac{1}{2}(180^\circ - 32^\circ) = 74^\circ.$$

Углы ADB и CBD равны как накрест лежащие. Значит,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 32^\circ + 74^\circ = 106^\circ.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Найдите все натуральные n , для которых $2n^2 + 3n - 35$ — квадрат простого числа.

Ответ: 4, 12.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен на линейные множители: $(2n - 7)(n + 5) = p^2$. Если произведение двух натуральных чисел равно квадрату простого числа, то либо один из множителей равен 1 (в нашей задаче может быть только $2n - 7 = 1$, откуда $n = 4$), либо множители равны друг другу ($2n - 7 = n + 5$, откуда $n = 12$). В обоих случаях число $2n^2 + 3n - 35$ оказывается квадратом простого числа.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответы угаданы (и не доказано, что других решений нет), 1 б. за один ответ и 3 б. за два ответа.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 8×8 ?

Ответ: 80.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цвета узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 81 узел, длина ломаной не более 80. Соответствующий пример легко строится (рис. 1).

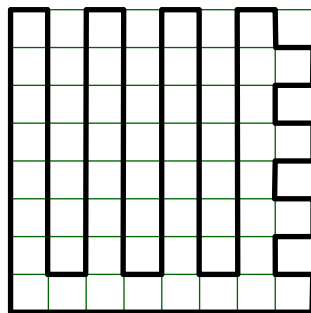


Рис. 1

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 80, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант II



1. Имеются 4 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 6 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p , при которых задача имеет решение.

Ответ: $0,8p - 24$ кг; $32 - 0,8p$ кг; $32,5 \leq p \leq 35$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8 - x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4; \\ 0 \leq 8 - x \leq 6 \end{cases} \iff 2 \leq x \leq 4.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0,4x + 0,3(8 - x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

Отсюда $x = 0,8p - 24$. Решив двойное неравенство $2 \leq 0,8p - 24 \leq 4$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. В треугольнике ABC медиана BN в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 20° . Найдите угол ABC .

Ответ: 100° .

Решение. Пусть N — середина отрезка BD . Тогда $ABCD$ — параллелограмм. В треугольнике ABD имеем равенство сторон AB и BD . Поэтому

$$\angle BDA = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ.$$

Углы ADB и CBD равны как накрест лежащие. Значит,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 20^\circ + 80^\circ = 100^\circ.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Найдите все натуральные n , для которых $2n^2 - 5n - 33$ — квадрат простого числа.

Ответ: 6, 14.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен на линейные множители: $(2n-11)(n+3) = p^2$. Если произведение двух натуральных чисел равно квадрату простого числа, то либо один из множителей равен 1 (в нашей задаче может быть только $2n - 11 = 1$, откуда $n = 6$), либо множители равны друг другу ($2n - 11 = n + 3$, откуда $n = 14$). В обоих случаях число $2n^2 - 5n - 33$ оказывается квадратом простого числа.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответы угаданы (и не доказано, что других решений нет), 1 б. за один ответ и 3 б. за два ответа.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 6×10 ?

Ответ: 76.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цвета узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 77 узлов, длина ломаной не более 76. Соответствующий пример легко строится (рис. 2).

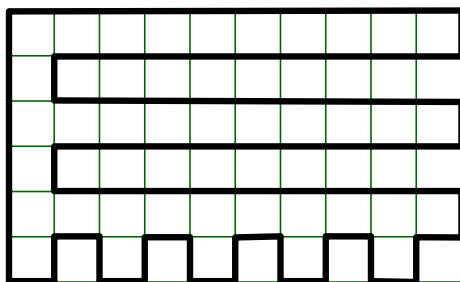


Рис. 2

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 76, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.