Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап

2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс

Вариант I

1. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 75 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 15 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k+20)x(n-75) = (k-15)x(n+100);$$

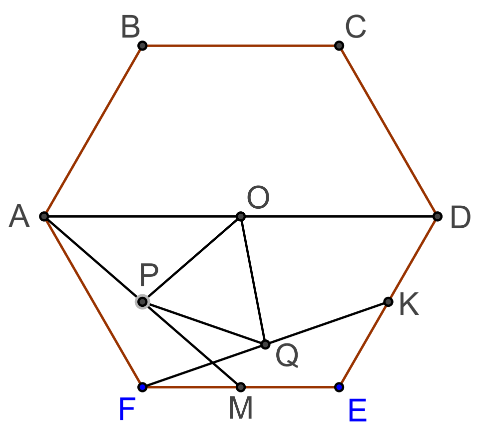
$$kn = (k+20)(n-75) = (k-15)(n+100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 60$, $n = 300$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

2. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Точка K — середина отрезка DE, M — середина EF, O — середина AD, P — середина AM, Q — середина FK. Докажите, что треугольник OPQ — правильный.

Доказательство. Точка O — центр правильного шестиугольника. Поэтому при повороте вокруг O на $60°$ точка A переходит в F, M в K, отрезок AM в отрезок FK, середина AM (точка P) в середину FK (точку Q), отрезок OP в отрезок OQ.



Значит, $OP = OQ$, $\angle POQ = 60^\circ$. Отсюда и следует, что треугольник OPQ — правильный.

Замечание. Возможно и решение с помощью метода координат.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 1 + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x+2} = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = x + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1}$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+1) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как сумма возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+1); \quad f(x) = f(-x-1).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 1$, откуда $x = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава никеля, меди и марганца. В первом — 30% никеля и 70% меди, во втором — 10% меди и 90% марганца, а в третьем — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 40% марганца. Какие значения может принимать процентное содержание меди в новом сплаве?

Ответ: от 40% до $43\dfrac{1}{3}$%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1+m_2+m_3 = m$ и $0{,}9m_2+0{,}6m_3 = 0{,}4m$. Количество меди в новом сплаве равно $0{,}7m_1 + 0{,}1m_2 + 0{,}25m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли меди имеем выражение $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}9x_2 + 0{,}6x_3 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x_2; \quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_2; \quad y = 0{,}4 + 0{,}075x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{4}{9}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания
11 класс
Вариант II dʒʘlsj dʒʘlsqʕʘ

1. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 50 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 10 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k+20)x(n-50) = (k-10)x(n+100);$$

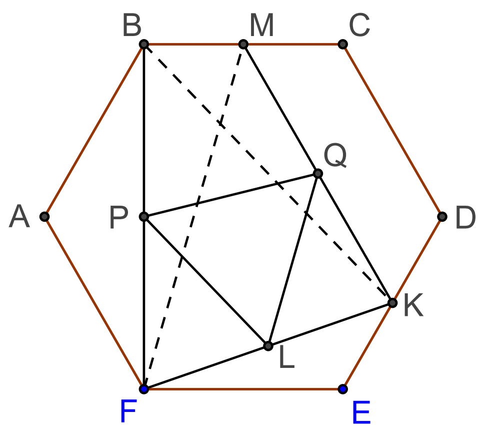
$$kn = (k+20)(n-50) = (k-10)(n+100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 20$, $n = 100$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

2. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Точка K — середина отрезка DE, M — середина BC, L — середина FK, P — середина BF, Q — середина MK. Докажите, что треугольник LPQ — правильный.

Доказательство. При повороте вокруг центра правильного шестиугольника на $120°$ точка B переходит в F, середина ED (точка K) в середину CB (точку M), отрезок BK в отрезок FM.



Значит, $BK = FM$, а угол между прямыми BK и FM равен $120°$. Отрезки PL и LQ — средние линии в треугольниках FBK и FMK. Поэтому $PL = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}FM = LQ$ и $\angle PLQ = 60°$. Отсюда и следует, что треугольник OPQ — правильный.

Замечание. Возможно и решение с помощью метода координат.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 2 + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x+2) \cdot \sqrt{x^2+4x+5} = 0.$$

Ответ: -1.

Решение. Пусть $f(x) = x + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1}$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+2) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как сумма возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+2); \quad f(x) = f(-x-2).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 2$, откуда $x = -1$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% магния. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 20% меди. Какие значения может принимать процентное содержание алюминия в новом сплаве?

Ответ: от 15% до 40%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1+m_2+m_3 = m$ и $0{,}15m_1+0{,}3m_2 = 0{,}2m$. Количество алюминия в новом сплаве равно $0{,}6m_1+0{,}45m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли алюминия имеем выражение $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_1 = \frac{4}{3} - 2x_2; \quad x_3 = x_2 - \frac{1}{3}; \quad y = 0{,}65 - 0{,}75x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $\frac{1}{3} \leqslant x_2 \leqslant \frac{2}{3}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.