Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант I

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD. Найдите угол DBC, если $\angle ABD = 40^\circ$.

Ответ: 50° или 40°.

Решение. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Поэтому либо этот центр — середина AC (и тогда $ABCD$ — прямоугольник), либо $DB \perp AC$ (и тогда $ABCD$ — ромб). В первом случае угол DBC дополняет угол ABD до прямого, а во втором случае эти углы равны друг другу.

Оценивание. За верное решение 10 б. Если рассмотрен только случай ромба, 6 б. Если рассмотрен только случай прямоугольника, 4 б.

2. Учительница написала на доске положительное число x и попросила Колю, Петю и Васю возвести это число соответственно в 3-ю, 4-ю и 12-ю степень. Оказалось, что до запятой в Колином числе не менее 9 цифр, а в Петином не более 11 цифр. Сколько цифр до запятой в записи Васиного числа?

Ответ: 33.

Решение. Из условия следует, что $x^3 \geqslant 10^8$, а $x^4 < 10^{11}$. Отсюда $10^{32} \leqslant x^{12} < 10^{33}$. Это означает, что целая часть Васиного числа 33-значное число.

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 1 + x\sqrt{x^2+1} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+2} = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = x(1 + \sqrt{x^2+1})$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+1) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как произведение положительных возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+1); \quad f(x) = f(-x-1).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 1$, откуда $x = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава никеля, меди и марганца. В первом — 30% никеля и 70% меди, во втором — 10% меди и 90% марганца, а в третьем — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 40% марганца. Какие значения может принимать процентное содержание меди в новом сплаве?

Ответ: от 40% до $43\dfrac{1}{3}$%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1+m_2+m_3 = m$ и $0{,}9m_2+0{,}6m_3 = 0{,}4m$. Количество меди в новом сплаве равно $0{,}7m_1 + 0{,}1m_2 + 0{,}25m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли меди имеем выражение $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}9x_2 + 0{,}6x_3 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x_2; \quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_2; \quad y = 0{,}4 + 0{,}075x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{4}{9}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант II

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD. Найдите угол DBC, если $\angle ABD = 35^\circ$.

Ответ: 55° или 35°.

Решение. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Поэтому либо этот центр — середина AC (и тогда $ABCD$ — прямоугольник), либо $DB \perp AC$ (и тогда $ABCD$ — ромб). В первом случае угол DBC дополняет угол ABD до прямого, а во втором случае эти углы равны друг другу.

Оценивание. За верное решение 10 б. Если рассмотрен только случай ромба, 6 б. Если рассмотрен только случай прямоугольника, 4 б.

2. Учительница написала на доске положительное число x и попросила Колю, Петю и Васю возвести это число соответственно в 4-ю, 5-ю и 20-ю степень. Оказалось, что до запятой в Колином числе не менее 8 цифр, а в Петином не более 9 цифр. Сколько цифр до запятой в записи Васиного числа?

Ответ: 36.

Решение. Из условия следует, что $x^4 \geqslant 10^7$, а $x^5 < 10^9$. Отсюда $10^{35} \leqslant x^{20} < 10^{36}$. Это означает, что целая часть Васиного числа 36-значное число.

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 2 + x\sqrt{x^2+1} + (x+2)\sqrt{x^2+4x+5} = 0.$$

Ответ: -1.

Решение. Пусть $f(x) = x(1 + \sqrt{x^2+1})$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+2) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как произведение положительных возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+2); \quad f(x) = f(-x-2).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 2$, откуда $x = -1$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% магния. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 20% меди. Какие значения может принимать процентное содержание алюминия в новом сплаве?

Ответ: от 15% до 40%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1+m_2+m_3 = m$ и $0{,}15m_1+0{,}3m_2 = 0{,}2m$. Количество алюминия в новом сплаве равно $0{,}6m_1+0{,}45m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли алюминия имеем выражение $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_1 = \frac{4}{3} - 2x_2; \quad x_3 = x_2 - \frac{1}{3}; \quad y = 0{,}65 - 0{,}75x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $\frac{1}{3} \leqslant x_2 \leqslant \frac{2}{3}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.