

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2015-2016 уч.г.
Задания отборочного этапа
Математика
10 класс

Задача № 1.

Однажды Красная Шапочка, захватив гостинец с несколькими пирожками отправилась в гости к бабушке. Отойдя недалеко от дома, она, не удержавшись, съела три самых больших пирога, отчего общий вес гостинца уменьшился на 35%. Немного не дойдя до бабушкиного дома она, опять не удержалась и съела, на этот раз три самых маленьких

пирожка. В результате общий вес гостинца уменьшился еще на $\frac{5}{13}$ по сравнению с предыдущим. Сколько пирожков было в корзине изначально.

Ответ с выбором варианта:

- 8
- 10
- 12
- 14

Задача № 2.

Попарно различные действительные числа a и b удовлетворяют равенствам $a(b+c)+c=b(c+a)+a=c(a+b)+b$. Найдите произведение abc .

Ответ с выбором варианта:

- 2
- 1
- 1
- 2

Задача № 3.

Никакие два из действительных чисел a, b, c и d не равны друг другу. Известно, что a и b являются корнями уравнения $x^2 - 2cx - 5d = 0$, a и d – корнями уравнения $x^2 - 2ax - 5b = 0$. Найдите сумму $a + b + c + d$.

Ответ с выбором варианта:

- 30
- 25
- 15
- 10

Задача № 4.

Сумма третьего и сорок седьмого членов арифметической прогрессии равна 11, а разность девятнадцатого и двадцать пятого члена равна 12. Найти число членов прогрессии, не превосходящих по абсолютной величине 70.

Ответ с выбором варианта:

- 62
- 54
- 49
- 38

Задача № 5.

Найдите косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медианы, проведенные к его боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Ответ с выбором варианта:

- 0,8
- 0,7
- 0,6
- 0,5

Задача № 6.

Окружность проходит через вершину С прямоугольника ABCD и касается сторон АВ и AD в точках М и N соответственно. Найти площадь прямоугольника, если расстояние от точки С до прямой MN равно x .

Ответ с выбором варианта:

- $4x^2$
- $3x^2$
- $2x^2$
- x^2

Задача № 7.

Найдите сумму всех натуральных чисел t , при которых уравнение $x^2 - 5tx + 84 = 0$ имеет целые корни.

Ответ с выбором варианта:

- 22
- 24
- 26
- 28

Задача № 8.

Сумма трех чисел, образующих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 30. Если из первого числа, вычесть 5, из второго 4, а третье не менять, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите разность этих чисел.

Ответ с выбором варианта:

- 10
- 14
- 16
- 18

Задача № 9.

Стороны треугольника ABC $AB = 13$, $BC = 12$, $AC = 5$. Две касающиеся внешним образом окружности одинакового радиуса расположены внутри треугольника, так что одна из них касается сторон АВ и АС, а вторая АВ и ВС. Найти радиус этих окружностей.

Ответ с выбором варианта:

- $\frac{26}{15}$
- $\frac{26}{19}$
- $\frac{26}{17}$
- $\frac{26}{21}$

Задача № 10.

Стороны AC и BC равнобедренного треугольника ABC равны 10м. Угол при вершине С равен 30° . Из вершин А и В одновременно в сторону вершины С начали ползти две улитки, каждая со своей постоянной скоростью. Через час после начала движения площадь треугольника, образованного улитками и вершиной С равнялась 14м^2 . Еще через час 6м^2 . (При этом улитки так и доползли до вершины С). Во сколько раз скорость одной улитки больше скорости другой?

Ответ с выбором варианта:

- 1,3
- 2
- 1,5
- 2,5

Задача № 11.

Периметр треугольника равен $15\sqrt{3}$, один из его углов равен 120° , а длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти радиус описанной окружности.

Ответ с выбором варианта:

- 5
- 6
- 7
- 8

Задача № 12.

О действительном числе x высказаны следующие четыре утверждения:

1) x – целое число; 2) $x+x^{-1}$ – целое число; 3) $x+x^{-2}$ – целое число; 4) x^2-4x – целое число.

Известно, что из этих утверждений верны только три. Найти наибольшее из таких x .

Ответ с выбором варианта:

- $2 + \sqrt{3}$
- $2 - \sqrt{3}$
- 2
- 2

Задача № 13.

Даны две арифметические прогрессии $1, 4, 7, \dots, 2002, 2005$ и $1, 6, 11, 16, \dots, 2001, 2006$.

Найти сумму общих членов у этих прогрессий.

Ответ с выбором варианта:

- 133799
- 232754
- 134781
- 336429

Задача № 14.

Найдите все значения a , при которых квадратное уравнение $x^2 - 3(a-1)x + 9a - 8 = 0$

имеет такие корни x_1, x_2 , а уравнение $x^2 - 3(a-2)x - 32 = 0$ – такие корни x_3, x_4 , что числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют геометрическую прогрессию.

Ответ с выбором варианта:

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{3}{5}$

Задача № 15.

Решить неравенство $x(2|x|+1)(x+2)(2|x|+5) \leq 24$. В ответе указать наибольшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству.

Ответ с выбором варианта:

- 8
- 10

- 2
- 6

Задача № 16.

Найти действительное число c при, при котором уравнение $x^2 + (c - 10)x + c^2 - 10c + 28 = 0$ имеет два корня, сумма квадратов которых равна 24.

Ответ с выбором варианта:

- $\sqrt{7}$
- $2\sqrt{3}$
- $2\sqrt{5}$
- $\sqrt{11}$

Задача № 17.

Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

Ответ с выбором варианта:

- 135423
- 114563
- 142327
- 142857

Задача № 18.

Найти сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$ дробей.

Ответ с выбором варианта:

- 1
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{8}{9}$
- $\frac{9}{10}$

Задача № 19.

При каком наименьшем значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + (a - 1)y = a + 3, \\ (a + 2)x + 2ay = 6a + 8 \end{cases} \text{ имеет бесконечное множество решений?}$$

Ответ с выбором варианта:

- 2
- 2
- 4
- 1

Задача № 20.

Не решая уравнения $x^2 - \sqrt{13}x + 3 = 0$ найти значение $x_1^5 - x_2^5$, где x_1, x_2 - корни уравнения.

Ответ с выбором варианта:

- 47
- 49
- 57
- 61

Задача № 21.

Найдите все натуральные числа m , при которых дробь $\frac{13m-1}{3m+5}$ равна целому числу. В

ответе указать сумму этих чисел.

Ответ с выбором варианта:

- 25
- 30
- 32
- 44

Задача № 22.

Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1}}$. В ответе указать

наибольшее целое число, входящее в это множество.

Ответ с выбором варианта:

- 0
- 1
- 2
- 4

Задача № 23.

Не решая уравнения $4x^2 - \sqrt{85}x + 5\frac{1}{4} = 0$, вычислить разность кубов его корней.

Ответ с выбором варианта:

- 0
- 1
- 3
- 5

Задача № 24.

Решить уравнение $x^5 + \frac{1}{x^5} = \frac{205}{16} \left(x + \frac{1}{x} \right)$. В ответ записать сумму модулей всех корней.

Ответ с выбором варианта:

- 2
- 4
- 3
- 5

Задача № 25.

При каком целом значении a уравнения $4x^2 - (2a+1)x - 2 = 0$ и $7x^2 + (3a-1)x - 44 = 0$ имеют общий корень?

Ответ с выбором варианта:

- 1
- 2
- 3
- 5