Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2015-2016 уч.г.
Задания заключительного (очного) этапа
Математика
9 класс

Задание 1. (20 баллов)
Известно, что $a<1, \quad b>2$.

Докажите, что $2a^2-4ab+3b^2-2b>2$.

Решение

Выполним преобразования:

$2a^2-4ab+3b^2-2b=2a^2-4ab+2b^2+b^2-2b+1-1=2(b-a)^2+(b-1)^2-1$

Учитывая, что $b-a>2-1=1,\ b-1>1$ и что функция $f(x)=x^2$ при положительных x возрастающая, получим $2(b-a)^2+(b-1)^2-1>2\cdot 1+1-1=2$.

Примечание. Если в левую часть требуемого неравенства подставляются значения a = 1 и b = 2 – 0 баллов.

Задание 2. (20 баллов)
На доске записано 100 чисел: 1, 2, …, 100. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа a^3+6b и b^3+6a. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 60 одинаковых чисел?

Решение

Инвариант задачи – четность. Количество четных и количество нечетных чисел не меняется, следовательно, 60 равных чисел получиться не может.

Задание 3. (20 баллов)
В десятичной записи некоторого натурального числа переставили цифры и получили число в три раза меньшее.

Доказать, что исходное число делится на 27.

Решение

Пусть a – исходное число, а число b получено из a после перестановки некоторых цифр. По условию $a=3b$, то есть число a делится на 3. Так как сумма цифр у чисел a и b одинакова, то, по признаку делимости на 3, число b тоже делится на 3. Далее, раз число b делится на 3, а число $a=3b$, то a делится на 9. Теперь согласно признаку делимости на 9, число b тоже делится на 9, а значит, число a делится на 27.

Примечание. Доказано, что число a делится на 9, – 9 баллов.

Задание 4. (20 баллов)
Винни-Пух съедает 3 банки сгущенки и банку меда за 25 минут, а Пятачок – за 55 минут. Одну банку сгущенки и 3 банки меда Пух съедает за 35 минут, а Пятачок – за 1 час 25 минут. За какое время они вместе съедят 6 банок сгущенки?

Решение

Первый способ

Из условия следует, что 4 банки сгущенки и 4 банки меда Пух съедает за 1 час, а Пятачок – за 2 часа 20 минут. Значит, одну банку сгущенки и одну банку меда Пух съедает за 15 минут, а Пятачок – за 35 минут. Используя первое из условий, получим, что 2 банки сгущенки Пух будет есть 10 минут, а Пятачок – 20 минут. Так как Пух ест сгущенку в два раза быстрее Пятачка, то за 20 минут они съедят 6 банок сгущенки.

Второй способ

Пусть Винни-Пух ест сгущенку со скоростью v_1 банки в минуту, а мед – со скоростью v_2 банки в минуту. Тогда можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{v_1} + \frac{1}{v_2} = 25 \\ \frac{1}{v_1} + \frac{3}{v_2} = 35 \end{cases}$$

Решив ее, получим, что $v_1 = \frac{1}{5}$ (банки в минуту).

Пусть Пятачок ест сгущенку со скоростью u_1 банки в минуту, а мед – со скоростью u_2 банки в минуту. Тогда, решая аналогичную систему

$$\begin{cases} \frac{3}{u_1} + \frac{1}{u_2} = 55 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{3}{u_2} = 85 \end{cases},$$

получим, что $u_1 = \frac{1}{10}$ (банки в минуту). Таким образом, Пятачок и Винни-Пух вместе едят сгущенку со скоростью $u_1 + v_1 = \frac{3}{10}$ банки в минуту, следовательно, 6 банок сгущенки они съедят за $6 : \frac{3}{10} = 20$ минут.

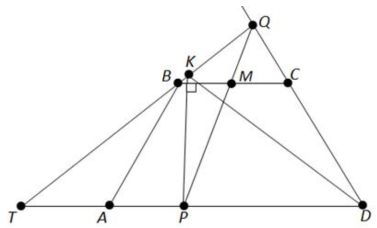
Ответ: 20 минут

Задание 5. (20 баллов)

Точка M - середина основания BC трапеции ABCD. На основании AD выбрана точка P. Прямая PM пересекает прямую CD в точке Q, причем C лежит между Q и D. Перпендикуляр к основаниям, проведенный через точку P, пересекает прямую BQ в точке K.

Докажите, что $\angle$QBC= $\angle$KDA.

Решение



Продолжим прямую BQ до пересечения с прямой AD в точке T.

Получим ΔBQC подобен ΔTQD по двум углам.

Тогда так как QM медиана в ΔBQC, то MP медиана в ΔTQD.

Тогда в ΔTKD высота KP является медианой, значит, треугольник ΔTKD равнобедренный.

Следовательно, $\angle KTD = \angle KDT$.

Кроме того, $\angle KTD = \angle QBC$, как соответственные при параллельных прямых.

Поэтому $\angle QBC = \angle KDA$.